

# GdT : Connexité rationnelle, log-paires et champs algébriques.

Introduction au programme des modèles minimaux pour les surfaces.  
(Basée sur les notes de Marco Andreatta)

Jérôme VON BUHREN - Novembre 2012

## 1 Introduction

Dans ce cours, nous allons présenter et développer des outils pour étudier la classification des surfaces à application birationnelle près. Pour une surface  $X$ , on note  $\mathcal{B}(X)$  l'ensemble des classes d'isomorphismes des surfaces birationnelles à  $X$ . Si  $[S_1], [S_2] \in \mathcal{B}(X)$  (ou  $S_1$  domine  $S_2$ ), on dit que  $[S_1]$  domine  $[S_2]$  et on note  $[S_2] \leq [S_1]$  (ou  $S_2 \leq S_1$ ) s'il existe un morphisme birationnel  $S_1 \rightarrow S_2$ . Une surface  $S$  est dite *minimale* si  $[S]$  ne domine que  $[S]$ . Ainsi, on se posera trois problèmes :

- L'existence d'une surface minimale dans  $\mathcal{B}(X)$  (Théorème 2.18).
- Les propriétés d'une surface minimale (Théorème 6.4).
- L'unicité des surfaces minimales dans  $\mathcal{B}(X)$  (Théorème 6.5).

Dans beaucoup de cas, on pourra ramener la question « les surfaces  $X$  et  $Y$  sont-elles birationnelles ? » à les « surfaces minimales  $X_{min} \in \mathcal{B}(X)$  et  $Y_{min} \in \mathcal{B}(Y)$  sont-elles isomorphes ? ». Le résultat principal est le théorème du cône de Mori (Théorème 5.1) qui va nous permettre de comprendre certaines propriétés des surfaces minimales. Voici les grandes étapes de sa démonstration.

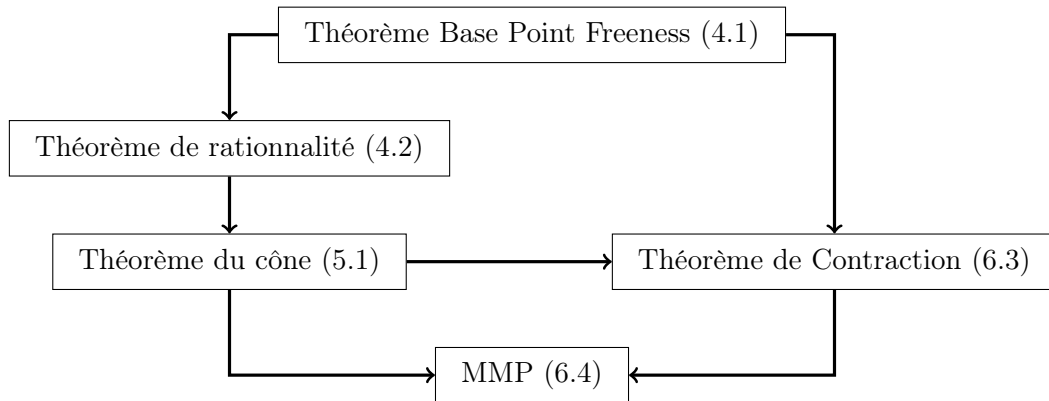


FIGURE 1 – Cheminement de la démonstration.

## 2 Notations et rappels

On fixe un corps  $k$  algébriquement clos de caractéristique 0. Dans la suite, une surface désignera une surface lisse et projective sur  $k$ .

Soit  $X$  une surface. On note  $Div(X)$  le groupe des diviseurs de Cartier sur  $X$  et  $Pic(X)$  le groupe  $Div(X)$  modulo l'équivalence linéaire. Commençons par rappeler le résultat suivant (voir [4]).

**Théorème 2.1** *Il existe une unique application  $\mathbb{Z}$ -bilinéaire  $Div(X) \times Div(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  notée par  $C \cdot D$  et appelée intersection de  $C$  et  $D$  pour deux diviseurs  $C, D \in Div(X)$  vérifiant*

- (i) *Si  $C$  et  $D$  sont deux courbes non singulières se rencontrant transversalement, alors  $C \cdot D = \#C \cap D$ .*
- (ii) *L'application est invariante sur les classes d'équivalences linéaires.*

On dit que deux diviseurs  $D_1$  et  $D_2$  sont numériquement équivalents (ce que l'on note  $D_1 \equiv D_2$ ) si  $D_1 \cdot L = D_2 \cdot L$  pour tout  $L \in Div(X)$ . On note

$$N_1(X) = (Div(X)/\equiv) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

et on désigne par  $[D]$  la classe de  $D \in Div(X)$  ou  $D \in Pic(X)$  dans  $N_1(X)$ . Par définition,  $N_1(X)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et par le théorème de Neron-Severi, il est de dimension finie. On appelle  $\rho(X) = \dim_{\mathbb{R}}(N_1(X))$  le nombre de Picard de  $X$ .

## 2.1 Amplitude

Les résultats suivant se trouvent dans [4].

**Définition 2.2** Un élément  $L \in Div(X)$  est dit *libre* si  $\mathcal{O}_X(L)$  est engendré par ces sections globales.

Si  $s_0, \dots, s_n \in \Gamma(X, L)$  sont des sections globales qui engendrent  $L$ , on peut définir un morphisme  $\varphi_L : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  tel que  $\mathcal{O}_X(L) = \varphi^*(\mathcal{O}(1))$ .

**Théorème 2.3** (Factorisation de Stein) *Soit  $L \in Div(X)$  tel que  $lL$  est libre pour  $l \gg 0$  et soit  $\varphi_{lL} : X \rightarrow Y$  le morphisme associé. Alors  $\varphi_{lL}$  se factorise en  $g \circ \varphi$  où  $\varphi : X \rightarrow Z$  est un morphisme projectif avec fibres connexes et  $g : Z \rightarrow Y$  est un morphisme fini. De plus,*

- (i) *Pour toute courbe  $C \subset X$ , on a  $L \cdot C = 0$  si et seulement si  $C$  est une fibre de  $\varphi$ .*
- (ii) *La variété  $Z$  est normale (ce qui est équivalent à  $\varphi_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Z$  par le théorème principal de Zariski).*
- (iii) *L'application  $\varphi$  coïncide avec  $\varphi_{lL}$  pour  $l \gg 0$ .*

**Remarque :** Pour  $l \gg 0$ , on a par construction de  $\varphi_{lL}$  que  $lL = \varphi^*(H)$  où  $H \in Pic(Z)$  est ample. On a même  $h^0(X, lL) = h^0(Z, H)$ .

**Définition 2.4** Un élément  $L \in Div(X)$  est dit *très ample* si  $L$  est libre et si  $\varphi_L$  est une immersion. On dit que  $L \in Div(X)$  est *ample* s'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $mL$  est très ample.

**Théorème 2.5** (Critère de Serre) *Pour  $L \in Div(X)$ , les propriétés suivantes sont équivalentes*

- (i)  *$L$  est ample.*
- (ii) *Pour tout faisceau cohérent  $F$  sur  $X$ , on a*

$$H^i(X, F \otimes \mathcal{O}_X(nL)) = 0 \text{ pour } i > 0 \text{ et } n \gg 0.$$

- (iii) *Pour tout faisceau cohérent  $F$  sur  $X$ , le faisceau  $F \otimes \mathcal{O}_X(nL)$  est engendré par ces sections globales pour  $n \gg 0$ .*
- (iv) *Pour tout fibré en droite  $H$  sur  $X$ , le faisceau  $H \otimes \mathcal{O}_X(nL)$  est très ample pour  $n \gg 0$ .*

**Théorème 2.6** (Annulation de Kodaira) *Si  $L \in \text{Div}(X)$  est ample, alors  $H^i(X, K_X + L) = 0$  pour  $i > 0$ .*

**Théorème 2.7** (Dualité de Serre) *Pour  $L \in \text{Pic}(X)$  et  $i = 0, 1, 2$  on a un isomorphisme*

$$H^i(X, L) \simeq H^{2-i}(X, K_X - L)^*.$$

## 2.2 Théorie de l'intersection

**Théorème 2.8** (de Riemann-Roch) *Si  $D \in \text{Div}(X)$ , on a*

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}D \cdot (D - K_X).$$

**Théorème 2.9** (Formule d'adjonction) *Si  $C$  est une courbe non singulière de genre  $g$  sur la surface  $X$ , alors*

$$2g - 2 = C \cdot (C + K_X).$$

**Théorème 2.10** (Critère de Nakai) *Un diviseur  $H \in \text{Div}(X)$  est ample si et seulement si  $H^2 > 0$  et  $H \cdot C$  pour toutes courbes irréductibles  $C$  de  $X$ .*

**Remarque :** Ainsi l'amplitude est une propriété numérique et on peut étendre la définition de diviseur ample à un diviseur à coefficient réel.

**Corollaire 2.11** *Si  $D \in \text{Div}(X)$  avec  $D^2 > 0$ , alors soit  $h^0(nD) \neq 0$ , soit  $h^0(-nD) \neq 0$  pour  $n \gg 0$ . De plus, le signe de  $H \cdot D$  où  $H \in \text{Pic}(X)$  est ample distingue les deux cas.*

**Théorème 2.12** (de l'indice de Hodge) *Si  $H$  est ample sur  $X$  et  $H \cdot D = 0$ , alors  $D^2 \leq 0$ . De plus, si  $D^2 = 0$ , alors  $D \equiv 0$ .*

**Remarque :** Une conséquence immédiate est que la forme bilinéaire d'intersection sur  $N_1(X)$  est de signature  $(1, \rho(X) - 1)$ .

## 2.3 Eclatements

On trouve les démonstrations des résultats suivants dans [4] et [1].

**Théorème 2.13** *Soient  $X$  une surface lisse et  $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$  l'éclatement d'un point  $p \in X$  et  $E = \varphi^{-1}(p)$  la courbe exceptionnelle associée. Alors*

(i) *On a  $E \cong \mathbb{P}^1$  et  $E^2 = -1$ .*

(ii) *Si  $C, D \in \text{Pic}(X)$ , alors  $(\varphi^*C) \cdot (\varphi^*D) = C \cdot D$  et  $(\varphi^*C) \cdot E = 0$ .*

(iii) *L'application  $\text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(\tilde{X})$  qui  $(D, n) \mapsto \varphi^*(D) + nE$  est un isomorphisme et  $\rho(\tilde{X}) = \rho(X) + 1$ .*

(iv) *Si  $\varphi_* : \text{Pic}(\tilde{X}) \rightarrow \text{Pic}(X)$  est la projection sur le premier facteur, on a*

$$\varphi^*(C) \cdot D = C \cdot \varphi_*(D) \text{ pour } C \in \text{Pic}(X) \text{ et } D \in \text{Pic}(\tilde{X}).$$

(v)  *$K_{\tilde{X}} = \varphi^*(K_X) + E$ .*

(vi) Si  $C \subset X'$  est une courbe de multiplicité  $r$  en  $p$  et si  $\tilde{C}$  désigne sa transformée stricte, alors  $\varphi^*(\tilde{C}) = C + rE$ .

**Remarque :** Soit  $D \in \text{Pic}(\tilde{X})$  distinct de  $E$ . On déduit du théorème ci-dessus que si  $D$  est ample (respectivement nef), alors  $\varphi_*(D)$  aussi. De plus si  $D^2 > 0$ , alors  $\varphi_*(D)^2 > 0$

**Définition 2.14** On dit qu'une courbe irréductible  $C$  d'une surface  $X$  est une *courbe*  $(-1)$  si  $C \cong \mathbb{P}^1$  et  $C^2 = -1$ .

**Théorème 2.15** (Castelnuovo) Soient  $X$  une surface lisse et projective et  $C \subset X$  une courbe  $(-1)$ . Alors il existe un morphisme  $\varphi : X \rightarrow X'$  sur une surface  $X'$  lisse et projective tel que  $\varphi(C) = p$  est un point et  $\varphi$  est l'éclatement de  $X'$  en  $p$ .

**Théorème 2.16** Si  $\varphi : S \rightarrow S'$  est une application birationnelle entre surface, alors il existe une surface  $\hat{S}$ , des morphismes  $f : \hat{S} \rightarrow S$  et  $g : \hat{S} \rightarrow S'$  composés d'éclatements et d'isomorphismes tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \hat{S} & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ S & \xrightarrow{\varphi} & S' \end{array}$$

**Lemme 2.17** La relation  $\leq$  sur  $\mathcal{B}(X)$  est une relation d'ordre.

Ainsi une surface minimale est un élément minimal pour  $\leq$  dans  $\mathcal{B}(X)$ .

**Théorème 2.18** Toute surface  $S$  domine une surface minimale.

DÉMONSTRATION :

Si  $S = S_0$  n'est pas minimale, alors il existe un morphisme birationnel  $S_0 \rightarrow S_1$  qui n'est pas un isomorphisme et par les théorèmes 2.16 et 2.13, on a  $\rho(S_0) > \rho(S_1) \geq 0$ . Ainsi en répétant le procédé, on obtient une surface minimale.  $\square$

## 2.4 Surface réglée

Rappelons qu'une surface réglée est une surface  $X$  munie d'un morphisme  $\pi : X \rightarrow B$  surjectif sur une courbe  $B$  lisse et projective et tel que chaque fibre de  $\pi$  soit isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ .

**Théorème 2.19** Soit  $\pi : X \rightarrow B$  une surface réglée. Soit  $C_0 \subset X$  une section et  $F \subset X$  une fibre de  $\pi$ . Alors

- (i) On a  $C_0 \cdot F = 1$  et  $F^2 = 0$ .
- (ii) L'application  $\text{Pic}(B) \times \mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(X)$  qui  $(L, n) \mapsto \pi^*(L) + nC_0$  est un isomorphisme.
- (iii) On a  $N_1(X) = \mathbb{R}[C_0] + \mathbb{R}[F]$ .

DÉMONSTRATION :

Voir [1].  $\square$

## 2.5 Résultats sur les cônes

Les démonstrations des résultats suivants se trouvent dans [3].

**Définition 2.20** Soit  $V \subset \mathbb{R}^n$  un cône.

- (i) Le *cône dual* de  $V$  est  $V^* = \{l \in (\mathbb{R}^n)^* \mid l \geq 0 \text{ sur } V\}$ .
- (ii) Un sous-cône  $W \subset V$  est appelé *extrémal* s'il est fermé, convexe et vérifie

$$u, v \in V \text{ et } u + v \in W \Rightarrow u, v \in W.$$

Un sous-cône extrémal de dimension 1 est appelé *arête extrémale*.

**Proposition 2.21** Soit  $V \subset \mathbb{R}^n$  un cône fermé et convexe.

- (i) On a  $V = V^{**}$ .
- (ii) Le cône  $V$  ne contient pas de droite si et seulement si  $V^*$  engendre  $(\mathbb{R}^n)^*$ .
- (iii) L'intérieur de  $V^*$  est  $\{l \in (\mathbb{R}^n)^* \mid l > 0 \text{ sur } V \setminus \{0\}\}$ .
- (iv) Si  $V$  ne contient pas de droite, alors  $V$  est l'enveloppe convexe de ses arêtes extrémales.
- (v) Si  $W$  est un sous-cône propre et extrémal de  $V$ , alors  $W \subset \partial V$ .
- (vi) Si  $V$  ne contient pas de droite et  $W$  est un sous-cône fermé propre de  $V$ , alors il existe une forme linéaire dans  $V^*$  strictement positive sur  $W \setminus \{0\}$  et qui s'annule sur au moins une arête extrémale de  $V$ .

**Remarque :** La condition dans (v) que  $V$  ne doit pas contenir de droite est nécessaire. En effet, le résultat est faux avec

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \text{ et } W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\}.$$

## 3 Le Cône de Mori-Kleiman

### 3.1 Généralités

On note  $NE(X) \subset N_1(X)$  le *cône des diviseurs effectifs*, c'est-à-dire

$$NE(X) = \{C \in N_1(X) \mid C = \sum r_i C_i \text{ où } r_i \in \mathbb{R}_+ \text{ et } C_i \subset X \text{ courbes irréductibles}\}$$

Le *Cône de Kleiman-Mori* est  $\overline{NE(X)}$ . On note pour  $H \in Pic(X)$

$$\overline{NE(X)}_{H \geq 0} = \{D \in \overline{NE(X)} \mid D \cdot H \geq 0\} \text{ et de même pour } >, \leq \text{ et } <.$$

**Définition 3.1** On dit que  $D \in N_1(X)$  est *numériquement effectif* (nef) si  $D \geq 0$  sur  $\overline{NE(X)}$ .

**Remarque :** Par définition, le cône  $Nef(X)$  des diviseurs nef est donc le cône dual de  $\overline{NE(X)}$ . De plus, en utilisant le corollaire 2.11, on remarque que le cône des diviseur amples  $Ample(X) \subset N_1(X)$  est inclus dans  $\overline{NE(X)}$ .

**Lemme 3.2** Soit  $D \in Div(X)$  nef et  $H \in Div(X)$  ample. Alors

- (i)  $D^2 \geq 0$

(ii)  $D + \varepsilon H$  est ample pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ .

DÉMONSTRATION :

Pour (i), on a par le critère de Nakai que le polynôme  $p(t) = (D + tH)^2$  est strictement positif pour  $t \gg 0$  et  $t \in \mathbb{Q}$ . Soit  $t \in \mathbb{Q}_+$  tel que  $p(t) = (D + tH)^2 > 0$ . Comme  $H$  est ample, on a  $H \cdot (D + tH) > 0$ , donc par le corollaire 2.11, on a que  $n(D + tH)$  est effectif pour  $n \gg 0$ . Ainsi, comme  $D$  est nef

$$p\left(\frac{t}{2}\right) = \left(D + \frac{t}{2}H\right)^2 = D \cdot (D + tH) + \frac{t^2}{4}H^2 > 0.$$

Ainsi  $p(t) > 0$  implique  $p(t/2) > 0$ , donc par continuité de  $p$ , on en déduit que  $D^2 = p(0) \geq 0$ .

Pour (ii), on utilise le critère de Nakai. En effet, on a que  $(D + \varepsilon H) \cdot C > 0$  pour toutes courbes irréductibles  $C$  de  $X$ , et  $(D + \varepsilon H)^2 > 0$  par la démonstration de (i).  $\square$

**Théorème 3.3** (Critère de Kleiman) *Un élément  $D \in \text{Pic}(X)$  est ample si et seulement si  $D > 0$  sur  $\overline{NE(X)} \setminus \{0\}$ .*

DÉMONSTRATION :

Si  $D$  est ample, on a par le critère de Nakai que  $D \geq 0$  sur  $\overline{NE(X)}$ . Supposons qu'il existe  $z \in \overline{NE(X)} \setminus \{0\}$  vérifiant  $D \cdot z = 0$ . Soit  $H \in \text{Div}(X)$  tel que  $H \cdot z < 0$ . Alors  $H + kD$  est ample pour  $k \gg 0$ , d'où  $0 \leq (H + kD) \cdot z < 0$ , ce qui est absurde.

Pour la réciproque, on fixe une norme  $\|\cdot\|$  sur  $N_1(X)$  et on note  $K = \{z \in \overline{NE(X)} \mid \|z\| = 1\}$  qui est compact. La fonction  $z \mapsto D \cdot z$  est minorée sur  $K$  par  $a \in \mathbb{Q}_+^*$ . Si  $H \in \text{Pic}(X)$  est ample, alors  $z \mapsto H \cdot z$  est majorée sur  $K$  par  $b \in \mathbb{Q}_+^*$ . Alors  $(D - \frac{a}{b}H) \geq 0$  sur  $K$  et donc sur  $\overline{NE(X)} \setminus \{0\}$ . En particulier  $(D - \frac{a}{b}H)$  est nef, donc par le lemme précédent, on a que  $D = (D - \frac{a}{b}H) + \frac{a}{b}H$  est ample.  $\square$

**Remarque** : Par la proposition 2.21(iii), ce résultat montre les égalités

$$\overbrace{\text{Nef}(X)}^{\circ} = \text{Ample}(X) \quad \text{et} \quad \overline{\text{Ample}(X)} = \text{Nef}(X).$$

Ainsi, on a les inclusions

$$\text{Ample}(X) \subset \text{Nef}(X) \subset \overline{NE(X)} \subset N_1(X).$$

**Proposition 3.4** *Le cône de Mori  $\overline{NE(X)}$  ne contient pas de droite. De plus, pour  $k \in \mathbb{R}_+$  et  $H \in \text{Pic}(X)$  ample, l'ensemble  $A = \{z \in \overline{NE(X)} \mid H \cdot z \leq k\}$  est compact.*

DÉMONSTRATION :

Soit  $H$  ample. Alors  $H$  est strictement positif sur  $\overline{NE(X)}$  par le critère de Kleiman, donc le cône ne peut pas contenir de droite. Pour le second point, soient  $D_1, \dots, D_\rho \in \text{Div}(X)$  telle que  $([D_1], \dots, [D_\rho])$  soit une base orthogonale de  $N_1(X)$ . Alors il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $mH \pm D_i$  est ample pour  $1 \leq i \leq \rho$ . Alors, si  $z \in \overline{NE(X)}$ , on obtient avec le critère de Kleiman que  $|D_i \cdot z| \leq mH \cdot z$ . Ainsi, si  $z \in A$ , on obtient que chaque coordonnée  $z_i$  de  $z$  est bornée par  $mk$ . Finalement  $A$  est borné et fermé, donc  $A$  est compact.  $\square$

**Lemme 3.5** *Soit  $X$  une surface lisse et projective.*

- (i) *Si  $C$  est une courbe irréductible dans  $X$  avec  $C^2 \leq 0$ , alors  $[C] \in \partial \overline{NE(X)}$ .*
- (ii) *Si  $C$  est une courbe irréductible dans  $X$  avec  $C^2 < 0$ , alors  $[C]$  engendre une arête extrême de  $\overline{NE(X)}$ .*

(iii) Si  $r$  engendre une arête extrême de  $\overline{NE(X)}$ , soit  $r^2 \leq 0$ , soit  $\rho(X) = 1$ .

DÉMONSTRATION :

(i)-(ii) Si  $C^2 = 0$ , alors  $C$  rencontre toutes les courbes irréductibles de  $X$  positivement, donc  $C$  est *nef*. Soit  $H \in \text{Pic}(X)$  ample. Si  $[C]$  est dans l'intérieur de  $\overline{NE(X)}$  alors il en est de même de  $[C] + t[H]$  pour  $t \in \mathbb{R}$  proche de 0. En particulier

$$0 \leq C \cdot (C + tH) \leq tC \cdot H$$

ce qui est absurde car  $C \cdot H > 0$ .

Supposons que  $C^2 < 0$  et écrivons  $[C] = z_1 + z_2$  où  $z_i$  est la limite d'une suite de classe de diviseurs effectifs  $D_{i,n}$ . On écrit

$$D_{i,n} = a_{i,n}C + D'_{i,n}$$

avec  $a_{i,n} \geq 0$ ,  $D'_{i,n}$  effectif et  $C \cdot D'_{i,n} \geq 0$ . En prenant l'intersection avec  $H$ , on voit que la limite supérieure de la suite  $(a_{i,n})$  est au plus 1. Ainsi, on peut supposer, quitte à extraire des sous-suites, que la suite  $(a_{i,n})$  converge vers  $a_i$ . Ainsi,  $([D'_{i,n}])$  a pour limite  $z'_i = z_i - a_i[C]$  qui vérifie  $C \cdot z'_i \geq 0$ . On a alors

$$[C] = (a_1 + a_2)[C] + z'_1 + z'_2$$

et en prenant l'intersection avec  $C$ , on obtient  $a_1 + a_2 \geq 1$ . Mais

$$0 = (a_1 + a_2 - 1)[C] + z'_1 + z'_2$$

et en prenant l'intersection avec  $H$ , cela implique  $z'_1 = z'_2 = 0$ , ce qui prouve (i) et (ii).

(iii) Soit  $D$  un diviseur sur  $X$  avec  $D^2 > 0$  et  $D \cdot H > 0$ . Pour  $m \gg 0$ , le diviseur  $K_X - mD$  rencontre  $H$  négativement. Ainsi, il n'est pas effectif, et par dualité de Serre, on a

$$h^2(X, mD) = h^0(X, K_X - mD) = 0.$$

Ainsi par le théorème de Riemann-Roch

$$h^0(X, mD) \geq \frac{1}{2}m^2D^2 + O(m).$$

Comme  $D^2 > 0$ , on obtient ainsi que  $D \in \overline{NE(X)}$  et donc

$$\{z \in N_1(X) \mid z^2 > 0 \text{ et } H \cdot z > 0\} \subset \overline{NE(X)}.$$

Comme cette ensemble est ouvert, il est contenu dans l'intérieur de  $\overline{NE(X)}$ , donc il ne peut pas contenir d'arête extrême de  $\overline{NE(X)}$ , sauf si  $\rho(X) = 1$ .  $\square$

### 3.2 Exemples

1. Si  $X = \mathbb{P}^2$ , alors  $N_1(X) = \mathbb{R}$  et  $\overline{NE(X)} = NE(X) = \mathbb{R}_+$ .
2. Si  $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , alors  $N_1(X) = \mathbb{R}^2$  et  $\overline{NE(X)} = \mathbb{R}_+l_1 + \mathbb{R}_+l_2$  où  $l_1$  et  $l_2$  sont des droites dans chaque  $\mathbb{P}^1$ .
3. Soient  $A$  est une surface abélienne et  $H \in \text{Pic}(A)$  ample. On a

$$\overline{NE(A)} = \text{Nef}(A) = \{z \in N_1(A) \mid z^2 \geq 0 \text{ et } H \cdot z \geq 0\}.$$

En effet, si  $C$  est une courbe irréductible sur  $A$ , alors avec la formule d'adjonction  $C^2 \geq 0$  (car  $K_A$  est trivial et  $A$  ne contient pas de courbe de genre 0), ce qui donne une inclusion. L'autre inclusion est donnée par la démonstration du point (iii) ci-dessus.

En particulier, si  $\rho(A) = 3$  le cône de Mori n'est pas engendré par un ensemble dénombrable d'arêtes extrémales. En effet, en fixant une base orthogonale et avec le théorème de l'indice de Hodge, on a la figure 2.

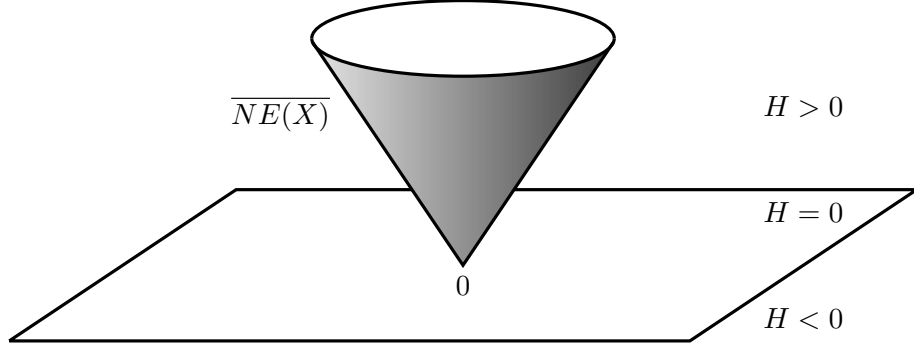


FIGURE 2 – Le cône de Mori d’une surface abélienne avec  $\rho = 3$ .

4. Soit  $X$  une surface réglée sur une courbe lisse  $C$  de genre  $g$ . On a vu que  $\rho(X) = 2$  et que  $N_1(X)$  est engendré par la classe d’une fibre  $F$  et la classe d’une section  $C_0$ . Dans ce cas,  $\overline{NE}(X)$  est un cône convexe de  $\mathbb{R}^2$ , donc il a deux arêtes extrémales, qui sont les deux demi-droites de sa frontière. Comme  $F^2 = 0$ , on a par le lemme 3.5(i) que  $[F]$  engendre une arête extrême du cône de Mori.

Nous allons utiliser plusieurs résultats sur les surfaces réglées que l’on trouve dans [4]. Soit  $e = -C_0^2$ . Alors  $e$  ne dépend que de  $X$  (pas de la section choisie) et  $e \geq -g$ .

Si  $e \geq 0$ , toute courbe irréductible sur  $X$  est numériquement équivalente à  $C_0$  ou à  $aC_0 + bF$  avec  $a \geq 0$  et  $b \geq ae$ . En particulier

$$\overline{NE}(X) = NE(X) = \mathbb{R}_+[C_0] + \mathbb{R}_+[F].$$

Si  $e < 0$  (donc  $g > 0$ ), alors toute courbe irréductible sur  $X$  est numériquement équivalente à  $C_0$  ou à  $aC_0 + bF$  avec  $a \geq 0$  et  $2b \geq ae$ . De plus, tout diviseur  $aC_0 + bF$  avec  $a > 0$  et  $2b > ae$  est ample. On en déduit que

$$\overline{NE}(X) = \mathbb{R}_+[2C_0 + eF] + \mathbb{R}_+[F].$$

Quand  $g = 1$ , le seul cas possible est  $e = -1$  et il y a une courbe irréductible numériquement équivalente à  $2C_0 - F$ , donc le cône  $NE(X)$  est fermé.

Quand  $g \geq 2$  et  $k = \mathbb{C}$ , il existe un fibré vectoriel  $\mathcal{E}$  de rang 2 de degré 0 sur  $C$  dont toutes les puissances symétriques sont stables. Alors la normalisation de  $\mathcal{E}$  a un degré positif pair  $-e$ . Pour la surface réglée associée  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ , aucun multiple de  $[2C_0 + eF]$  n’est effectif. En particulier,  $2C_0 + eF$  n’est pas ample bien qu’il est une intersection positive avec toute courbe irréductible de  $X$ . Par le critère de Kleiman, on obtient donc que  $NE(X)$  n’est pas fermé. En fait

$$NE(X) = (\mathbb{R}_+[2C_0 + eF] + \mathbb{R}_+^*F) \cup \{0\}.$$

5. Soit  $X \rightarrow \mathbb{P}^2$  l’éclatement en les 9 points de bases d’un pinceau de cubiques. Soit  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  le morphisme donné par le pinceau de cubiques et  $B$  l’ensemble fini de  $X$  où  $\pi$  n’est pas lisse. Les diviseurs exceptionnels  $E_0, \dots, E_8$  sont des sections de  $\pi$ . Les fibres lisses de  $\pi$  sont des courbes elliptiques, donc elles deviennent des groupes abéliens en choisissant leur intersection avec  $E_0$  comme origine. Les translations par  $E_i$  engendrent un groupe  $G$  de  $Aut(X \setminus B)$  et l’on peut montrer que  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^8$ . On peut voir que tout automorphisme de  $X \setminus B$  se prolonge en un automorphisme de  $X$  (voir [3]).

Pour chaque  $\sigma \in G$ , la courbe  $E_\sigma = \sigma(E_0)$  est encore une courbe  $(-1)$ . On en déduit par le lemme 3.5(ii) que  $\overline{NE}(X)$  contient une infinité d’arêtes extrémales rencontrant  $\overline{NE}(X)_{K_X < 0}$ .



## 4 Quelques résultats préliminaires

### 4.1 Base point freeness

**Théorème 4.1** (Base point freeness) *Soit  $X$  une surface et  $D \in \text{Div}(X)$ . Si  $D$  est nef, non ample et  $D - \varepsilon K_X$  est ample pour un  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ , alors  $mD$  est libre pour  $m \gg 0$ .*

DÉMONSTRATION :

Il y a trois cas possible.

**Cas 1.** Si  $D^2 > 0$ , alors il existe une courbe  $C$  vérifiant  $C \cdot D = 0$ , sinon  $D$  serait ample par le critère de Nakai. Par le théorème de l'indice de Hodge, on en déduit que  $C^2 < 0$  (à cause de la signature de la forme d'intersection). Comme  $D - \varepsilon K_X$  est ample, on a par le critère de Nakai que

$$-\varepsilon K_X \cdot C = C \cdot (D - \varepsilon K_X) > 0.$$

Ainsi  $K_X \cdot C < 0$ , et en utilisant la formule du genre, on obtient que  $C$  est une courbe  $(-1)$ . On peut donc utiliser le théorème de Castelnuovo, pour obtenir l'existence d'une contraction  $\varphi : X \rightarrow X_1$  de  $C$ . Par le théorème 2.13, on a que  $D_1 = \varphi_*(D)$  est un diviseur nef sur  $X_1$  avec  $D_1^2 > 0$  et que  $\varphi_*(D - \varepsilon K_X) = D_1 - \varepsilon K_{X_1}$  est un diviseur ample. Si  $D_1$  n'est pas ample, on peut recommencer le procédé ci-dessus et après un nombre fini d'étapes (à cause du (iii) dans le théorème 2.13), on obtient  $g : X \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_j$  avec un diviseur  $D_j$  qui est ample. Alors  $D = g^*(D_j)$  et le théorème est prouvé.

**Cas 2.** Supposons que  $D^2 = 0$  et  $D \not\equiv 0$ . Alors comme  $D - \varepsilon K_X$  est ample, on obtient que  $K_X \cdot D < 0$ . En écrivant

$$mD - K_X = \frac{1}{\varepsilon}(D - \varepsilon K_X) + (m - \frac{1}{\varepsilon})D$$

on obtient que  $mD - K_X$  est ample pour  $m \gg 0$ , donc  $h^i(mD) = 0$  par le théorème d'annulation de Kodaira. Par le théorème de Riemann-Roch, on obtient ainsi que

$$h^0(mD) \sim_m 1/2 \times (-K_X \cdot D)m$$

et en particulier que  $h^0(mD) \rightarrow \infty$ . Soient  $M$  et  $F$  les composantes mobile et fixe de  $mD$ . Puisque  $M$  est nef et n'a pas de composante fixe, on a

$$0 \leq M^2 \leq M \cdot (M + F) = MmD \leq (M + F)mD = (mD)^2 = 0$$

d'où  $M^2 = M \cdot F = F^2 = 0$ . Ainsi  $|M|$  a point de base libre, puisque qu'il n'a pas de composante fixe et que le nombre de points de bases de  $|M|$  est majoré par  $M^2 = 0$ . Soit  $\varphi = \varphi_{mM} : X \rightarrow Z$  la contraction associée pour  $m \gg 0$  où  $Z$  est une variété normale et soit  $H$  un fibré en droite très ample sur  $Z$  tel que  $mM = \varphi^*(H)$ . On a par la factorisation de Stein que

$$h^0(X, n(mM)) = h^0(X, \varphi^*(nH)) = h^0(Z, nH).$$

Par Riemann-Roch normal et asymptotique, on a que  $n \mapsto h^0(X, nM) = h^0(Z, nH)$  à une croissance linéaire, donc  $Z$  est une courbe. Comme  $Z$  est une courbe normale, elle est lisse. Puisque  $M \cdot F = 0$ , alors  $F$  doit être contenu dans une fibre et comme  $F^2 = 0$ , on obtient que  $F$  est proportionnel à une fibre. Ainsi,  $F = \varphi^*(\sum a_i P_i)$  pour des  $a_i \in \mathbb{Q}_+^*$  et  $P_i \in Z$ . C'est pourquoi, on a

$$|m'mD| = m'(\varphi^*(H + \sum a_i P_i)).$$

Puisque  $(H + \sum a_i P_i)$  est ample (il est de degré strictement positif), on a que  $|m'mD|$  a point de base libre pour  $m' \gg 0$ .

**Cas 3.** Si  $D \equiv 0$ , alors  $lD - K_X \equiv -K_X \equiv (D - \varepsilon K_X)/\varepsilon$  est ample pour tout  $l \in \mathbb{Z}$ . Ainsi, par le théorème d'annulation de Kodaira et par le théorème de Riemann-Roch, on obtient

$$h^0(X, lD) = \chi(\mathcal{O}_X(lD)) = \frac{1}{2}(lD - K_X) \cdot K_X + \chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{2}(0 - K_X) \cdot K_X + \chi(\mathcal{O}_X) = h^0(X, \mathcal{O}_X) = 1.$$

Finalement,  $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_X$  et le résultat est montré.  $\square$

## 4.2 Le théorème de rationalité

**Théorème 4.2** (de rationalité) *Soit  $X$  une surface où  $K_X$  n'est pas nef. Soit  $H \in \text{Div}(X)$  ample. On définit le seuil nef de  $H$  par*

$$t_0 = t(H) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid tK_X + H \text{ est nef}\} < \infty.$$

*Alors  $t_0$  est un nombre rationnel de dénominateur plus petit que 3.*

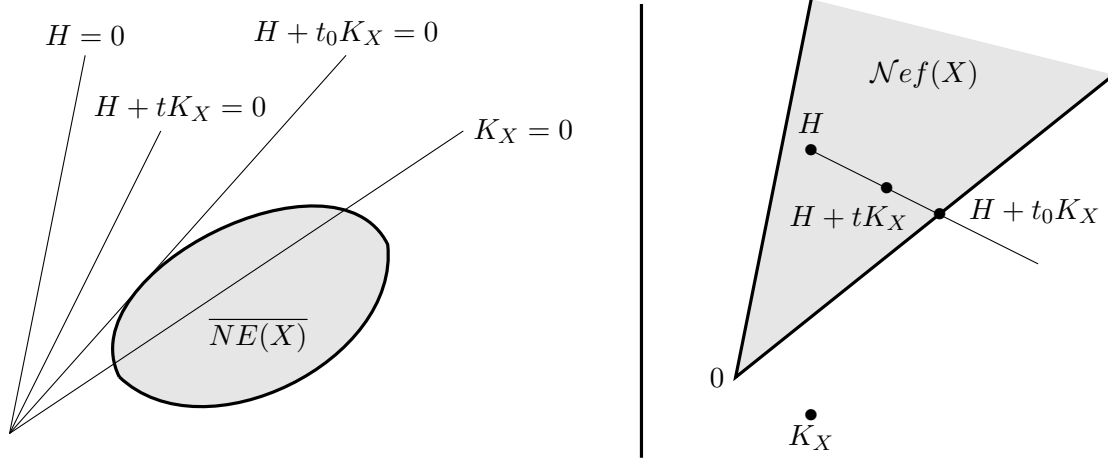


FIGURE 3 – Représentation de  $t_0$ .

DÉMONSTRATION :

La situation est résumée par la figure 3. Ainsi, on vérifie facilement que

$$t_0 = t(H) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid tK_X + H \text{ n'est pas nef}\}$$

On décompose la preuve en trois étapes.

**Étape 1.** Si  $n(H + t_1 K_X) = D_1$  est effectif pour  $n > 0$  avec  $t_1 \in \mathbb{Q}$  et  $t_1 > t_0$  (donc  $D_1$  n'est pas nef) alors

$$t_0 = \min_{\Gamma \subset D_1} \frac{H \cdot \Gamma}{-K_X \cdot \Gamma}$$

où le minimum parcourt l'ensemble des composantes irréductibles  $\Gamma$  de  $D_1$  telles que  $K_X \cdot \Gamma < 0$ . En effet, si  $0 < t < t_1$ , le diviseur  $H + tK_X$  est une combinaison positive de  $H$  et  $D_1$ , puisque

$$H + tK_X = H + \frac{t}{t_1}(t_1 K_X) = (1 - \frac{t}{t_1})H + \frac{t}{t_1}(\frac{1}{n}D_1).$$

si bien qu'il n'est pas nef si et seulement si il existe une composante irréductible  $\Gamma$  de  $D_1$  telle que  $(H + tK_X) \cdot \Gamma < 0$ , c'est à dire si et seulement si

$$t > \min_{\Gamma \subset D_1} \frac{H \cdot \Gamma}{-K_X \cdot \Gamma} \quad \text{avec} \quad K_X \cdot \Gamma < 0$$

où le minimum parcourt l'ensemble des composantes irréductibles  $\Gamma$  de  $D_1$ .

**Étape 2.** Supposons que  $t_0 \notin \mathbb{Q}$  et fixons  $n, m \in \mathbb{Z}$  tels que  $n < mt_0 < n + 1$ . Alors  $mH + nK_X$  est ample, mais  $mH + (n + 1)K_X$  n'est pas nef. Pour  $m > 0$ , posons  $mt_0 = n + \alpha$  avec  $0 \leq \alpha < 1$

et écrivons  $D_0 = H + t_0 K_X \in N^1(X)$  qui est nef. On obtient alors avec Riemann-Roch et le théorème d'annulation de Kodaira que

$$\begin{aligned} h^0(mH + (n+1)K_X) &= \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(mH + (n+1)K_X) \cdot (mH + nK_X) \\ &= \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(m^2 D_0^2 + m(1-2\alpha)D_0 \cdot K_X - \alpha(1-\alpha)K_X^2). \end{aligned}$$

Si  $D_0^2 > 0$ , alors  $H^0(mH + (n+1)K_X) \neq 0$  pour  $m \gg 0$ . Si  $D_0^2 = 0$  et  $D_0 \not\equiv 0$ , alors nécessairement  $D_0 \cdot K_X < 0$  (car  $D_0^2 = D_0 \cdot (H + t_0 K_X) = 0$  et  $D_0 \cdot H > 0$  car  $H$  est ample). Ainsi  $H^0(mH + (n+1)K_X) \neq 0$  si  $m \gg 0$  est grand et  $\alpha$  proche de 1. Pour finir, si  $D_0 \equiv 0$ , alors  $K_X \equiv -(1/t_0)H$ . Dans tous les cas, on peut trouver un diviseur  $D_1$  comme dans l'étape 1, ainsi  $t_0 \in \mathbb{Q}$ .

**Etape 3.** On reprend les notations du théorème BPF avec  $D = H + t_0 K_X$  et  $\varepsilon = t_0$ . Comme dans la démonstration du théorème BPF, on a trois cas.

**Cas 1.** Si  $D^2 > 0$ , alors il y a une courbe  $(-1) \cdot C$  avec  $D \cdot C = 0$ . Ainsi  $t_0 = \frac{H \cdot C}{-K_X \cdot C} = H \cdot C$  est un entier.

**Cas 2.** Si  $D^2 = 0$  et  $D \not\equiv 0$ , alors on considère  $\varphi_{mD}$  la contraction associée à  $mD$  avec  $m \gg 0$  et soit  $F$  une fibre générale. On a  $F^2 = 0$  et  $t_0 = \frac{H \cdot F}{-K_X \cdot F}$  car  $D \cdot F = 0$ . Ainsi  $K_X \cdot F < 0$  et par la formule du genre  $-K_X \cdot F = 2$ . Finalement,  $t_0$  a un dénominateur de 1 ou 2.

**Cas 3.** Si  $D \equiv 0$  et  $\rho(X) > 1$ , soit  $H'$  un diviseur non proportionnel à  $H$  (existe car être ample est une condition ouverte). Comme  $H$  et  $K_X$  sont colinéaires, alors  $D' = H' + t_0(H')K_X \not\equiv 0$  se trouve dans un des cas précédents et donc il existe une courbe  $C$  telle que  $-K_X \cdot C = 1$  ou 2. Puisque  $D \equiv 0$ , nous avons  $D \cdot C = 0$  qui implique que  $t_0 = \frac{H \cdot C}{-K_X \cdot C}$  a un dénominateur égal à 1 ou 2.

Si  $\rho(X) = 1$ , soit  $L$  un élément de  $N^1(X)$  correspondant à 1. Alors, on peut écrire  $-K_X = kL$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$  (car  $K_X$  n'est pas nef). Supposons que  $k > 3$ . Alors pour  $x = 1, 2, 3$ , on a par le théorème d'annulation de Kodaira

$$\chi(\mathcal{O}_X(K_X + xL)) = h^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + xL)) = 0$$

puisque  $K_X + xL = (x-k)L$  n'est pas effectif. Cela implique que  $\chi(\mathcal{O}_X(K_X + xL)) = 0$  car c'est un polynôme de degré 2 par Riemann-Roch, ce qui est absurde (car  $\chi(\mathcal{O}_X(K_X + xL)) > 0$  pour  $x \gg 0$ ). Ainsi  $k \leq 3$  et si  $H = \lambda L$  avec  $\lambda \in \mathbb{N}$ , on a

$$H + tK_X = (\lambda - tk)L$$

d'où  $t_0 = \lambda/k$ . Dans tous les cas le dénominateur de  $t_0$  est  $\leq 3$ . □

## 5 Le théorème de Mori

**Théorème 5.1** (Mori, 1982) *Soit  $X$  une surface lisse et projective. Notons  $(R_i)_{i \in I}$  l'ensemble des arêtes extrémales de  $\overline{NE(X)}$  rencontrant  $\overline{NE(X)}_{K_X < 0}$ . Alors, on a que*

$$\overline{NE(X)} = \overline{NE(X)}_{K_X \geq 0} + \sum_{i \in I} R_i.$$

*De plus, si  $H$  est un diviseur ample et si  $\varepsilon > 0$ , alors il n'y a qu'un nombre fini de  $R_i$  vérifiant  $(K_X + \varepsilon H) \cdot R_i \leq 0$ .*

Le théorème de Mori nous dit que dans le demi-espace  $\{K_X < 0\}$ , le cône de Mori est polyédral et que les arêtes extrémales de ce demi-espace ne peuvent que s'accumuler en se rapprochant de l'hyperplan  $\{K_X = 0\}$ .

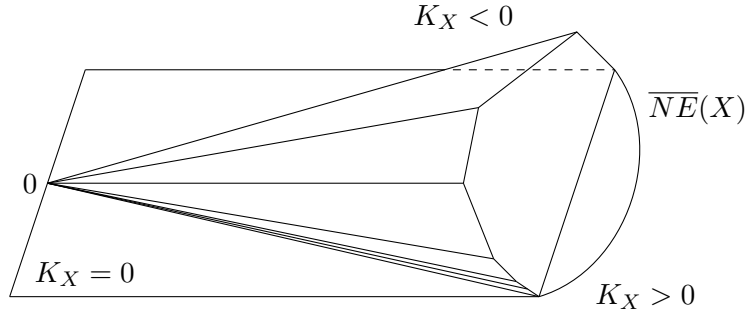


FIGURE 4 – Le cône de Mori.

DÉMONSTRATION :

On peut supposer que  $K_X$  n'est pas nef, sinon le résultat est évident.

**Étape 1 :** Soit  $L \in \text{Pic}(X)$  nef et non ample tel que  $L^\perp$  rencontre  $\overline{NE(X)}_{K_X \geq 0}$  uniquement en 0. On définit

$$F_L = L^\perp \cap \overline{NE(X)}.$$

Par le critère de Kleiman, on a que  $F_L \neq \{0\}$ . Soit  $H \in \text{Pic}(X)$  ample. Pour  $\nu \in \mathbb{N}$ , on pose

$$r_L(\nu, H) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid (\nu L + H) + tK_X \text{ est nef}\}.$$

Par le théorème de rationalité, on a que  $r_L(\nu, H) \in \frac{1}{6}\mathbb{N}$  et puisque  $L$  est nef, on a que la fonction  $\nu \mapsto r_L(\nu, H)$  est croissante. De plus, la fonction  $\nu \mapsto r_L(\nu, H)$  est majorée, car si  $z \in F_L \setminus \{0\}$ , on a  $K_X \cdot z < 0$  et

$$r_L(\nu, H) \leq \frac{H \cdot z}{(-K_X \cdot z)}.$$

Ainsi, la fonction  $\nu \mapsto r_L(\nu, H)$  est constante pour  $\nu \geq \nu_0 \in \mathbb{N}$  de valeur  $r_L(H)$ . Comme  $L$  et  $6(\nu_0 L + H + r_L(H)K_X)$  sont nef mais non amples, on obtient en posant

$$D(\nu L, H) = 6(\nu L + H + r_L(H)K_X) \in \text{Pic}(X)$$

et en remarquant que

$$D(\nu L, H) = 6(\nu - \nu_0)L + 6(\nu_0 L + H + r_L(H)K_X)$$

que

$$\{0\} \neq F_{D(\nu L, H)} \subset F_L \text{ pour } \nu > \nu_0.$$

**Étape 2 :** Montrons que si  $\dim(F_L) > 1$ , alors on peut trouver  $H$  ample avec

$$\dim(F_{D(\nu L, H)}) < \dim(F_L).$$

En effet, si l'on suppose le contraire, on remarque en fixant une base  $(K_X, H_1, \dots, H_{\rho-1})$  de  $N_1(X)$  avec  $H_i$  ample que les équations

$$\nu L + H_i + r_L(H_i)K_X = 0 \text{ sur } F_L \Leftrightarrow H_i + r_L(H_i)K_X = 0 \text{ sur } F_L$$

pour  $i = 1, \dots, \rho - 1$  sont toutes satisfaites sur  $F_L$  par hypothèse et par la partie 1. Comme les  $H_i + \frac{r_L(H_i)}{6}K_X$  engendrent un espace de dimension  $\rho - 1$ , l'orthogonal de cet espace est de dimension 1 et contient  $F_L \neq \{0\}$ , d'où  $\dim(F_L) = 1$ . En répétant l'argument, on obtient qu'il existe un diviseur nef et non ample  $L'$  tel que

$$F_{L'} \subset F_L \text{ et } \dim(F_{L'}) = 1.$$

**Etape 3 :** Notons  $J$  l'ensemble des diviseurs nef et non ample tel que  $L^\perp$  rencontre  $\overline{NE(X)}_{K_X \geq 0}$  uniquement en 0 et  $\dim(F_L) = 1$ . On va montrer que

$$\overline{NE(X)} = \overline{W} \quad \text{où} \quad W = \overline{NE(X)}_{K_X \geq 0} + \sum_{L \in J} F_L.$$

Supposons que  $\overline{W} \subsetneq \overline{NE(X)}$ . Par la proposition 2.21(v), il existe  $N \in N_1(X)$  nef, non ample et strictement positif sur  $\overline{W} \setminus \{0\}$ . En utilisant un argument de compacité et le critère de Kleiman, on obtient pour  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$  petit que  $N - \varepsilon K_X$  est ample. De même, on remarque que pour  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$  petit  $M = N + \varepsilon K_X$  est strictement positif sur  $\overline{W} \setminus \{0\}$  et non nef (Voir la figure 5).

Les deux dernières conditions sont ouvertes, donc quitte à remplacer  $N$  par un élément à coefficient rationnel dans son voisinage et à prendre un multiple, on a montré qu'il existe  $N \in \text{Pic}(X)$  avec  $H = N - \varepsilon K_X$  ample et  $M = N + \varepsilon K_X$  strictement positif sur  $\overline{W} \setminus \{0\}$  et non nef. Finalement quitte à prendre des multiples, on a montré qu'il existe  $M \in \text{Pic}(X)$  et  $a \in \mathbb{N}$  tel que  $M > 0$  sur  $\overline{W} \setminus \{0\}$ ,  $M$  est non nef et  $H = M - aK_X$  est ample. En utilisant le lemme de rationalité, on obtient

$$L = 6(H + t_0(H)K_X) \in \text{Pic}(X) \text{ nef et non ample.}$$

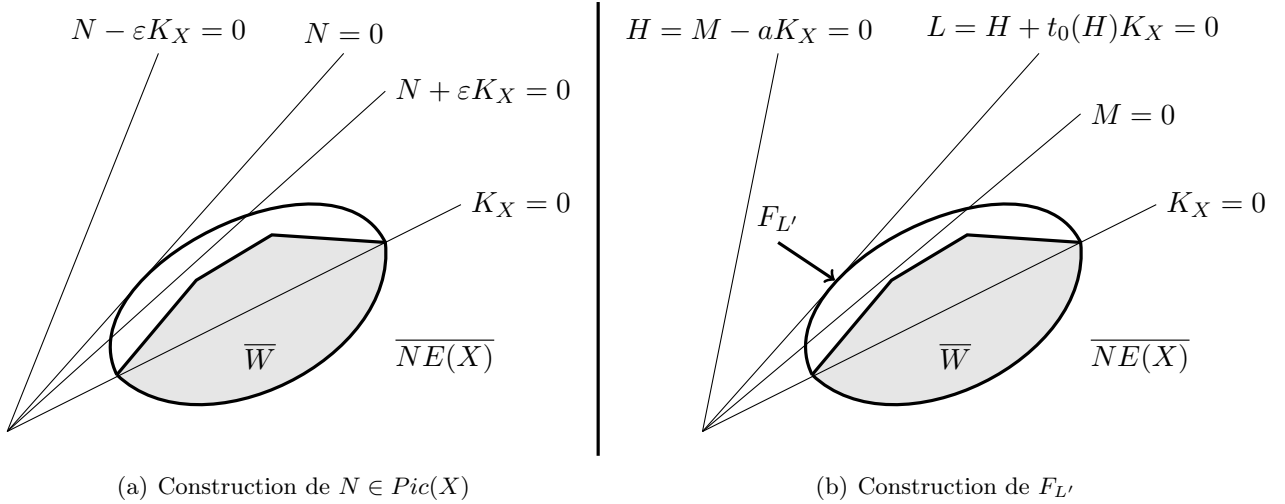


FIGURE 5 – Etape 3.

Par définition, on a  $t_0(H) < a$  car  $M$  est non ample. Par l'étape 2, il existe  $L'$  nef et non ample tel que  $F_{L'} \subset F_L$  et  $\dim(F_{L'}) = 1$ . Si  $z$  engendre  $F_{L'} \subset F_L$ , alors  $K_X \cdot z \neq 0$  (car  $H \cdot z \neq 0$ ) et on a

$$t_0(H) = \frac{H \cdot z}{-K_X \cdot z} > 0$$

d'où  $K_X \cdot z < 0$ . D'autre part, comme  $M > 0$  sur  $\overline{W} \setminus \{0\}$ , on a

$$0 = L \cdot z = (M - aK_X + t_0(H)K_X) \cdot z = M \cdot z + (t_0(H) - a)K_X \cdot z$$

d'où comme  $K_X \cdot z \neq 0$

$$t_0(H) - a = \frac{M \cdot z}{-K_X \cdot z} < 0$$

donc  $K_X \cdot z > 0$  ce qui est absurde. Ainsi  $\overline{NE(X)} = \overline{W}$ .

**Etape 4 :** Montrons pour  $H$  ample et  $\varepsilon > 0$  qu'il n'y a qu'un nombre fini de  $F_L$  avec  $L \in J$

vérifiant  $(K_X + \varepsilon H) \cdot F_L \leq 0$ . On fixe une base  $(K_X, H_1, \dots, H_{\rho-1})$  de  $N_1(X)$  avec  $H_i$  ample. Par l'étape 1, pour chaque  $F_L$ , il existe  $\nu_i \in \mathbb{N}$  tel que

$$F_{D(\nu_i L, H_i)} = F_L.$$

Ainsi, si  $z_L$  est un générateur de  $F_L$ , on a par le théorème de rationalité que

$$\frac{z \cdot H_i}{z \cdot K_X} \in \frac{1}{6}\mathbb{Z}.$$

Or les droites  $\mathbb{R} \cdot z_L$  appartiennent à l'ensemble affine  $U = \{K_X \neq 0\} \subset \mathbb{P}N_1(X)$  qui est homéomorphe à  $\mathbb{R}^{\rho-1}$  par

$$\mathbb{R} \cdot z \mapsto \left( \frac{z \cdot H_1}{z \cdot K_X}, \dots, \frac{z \cdot H_{\rho-1}}{z \cdot K_X} \right).$$

Ainsi, l'ensemble  $(F_L)_{L \in J}$  est discret. Pour  $L \in J$ , notons  $z_L$  l'unique élément de  $F_L$  vérifiant  $K_X \cdot z_L = -1$ . Alors

$$(K_X + \varepsilon H) \cdot F_L \leq 0 \Leftrightarrow (K_X + \varepsilon H) \cdot z_L \leq 0 \Rightarrow H \cdot z_L \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

On conclut donc avec la proposition 3.4.

**Etape 5 :** Montrons que le cône  $W$  est fermé et que  $(R_i)_{i \in I} = (F_L)_{L \in J}$ . Par la proposition 2.21(iv), il suffit de montrer que toute arête extrême  $R = \mathbb{R}_+ z$  de  $\overline{W}$  vérifiant  $z \cdot K_X < 0$  est dans  $W$ . On écrit  $z$  comme la limite de  $(r_m + s_m)$  où  $r_m \cdot K_X \geq 0$  et  $s_m \in \sum_{L \in J} F_L$ . Soit  $H$  un diviseur ample sur  $X$ . Les suites  $(H \cdot r_m)$  et  $(H \cdot s_m)$  sont bornées (par  $H \cdot z + 1$  pour  $m \gg 0$ ), car  $(r_m)$  et  $(s_m)$  sont dans  $\overline{NE(X)}$ . Ainsi par la proposition 3.4, quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer que  $(r_m)$  et  $(s_m)$  ont des limites  $r$  et  $s$  (car il existe des bases de  $N_1(X)$  composées de diviseurs amples), qui sont dans  $\overline{W}$ . Puisque  $z$  engendre une arête extrême de  $\overline{W}$  et  $z = r + s$ , alors  $r$  et  $s$  sont des multiples positifs de  $z$ . Puisque  $K_X \cdot z < 0$ , et  $K_X \cdot r \geq 0$ , on a  $r = 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $(K_X + \varepsilon H) \cdot z < 0$ . Par l'étape 4, il n'y a qu'un nombre fini de  $F_{L_1}, \dots, F_{L_q}$  avec  $L_\alpha \in J$  tel que  $(K_X + \varepsilon H) \cdot F_{L_\alpha} < 0$ . Ecrivons  $s_m = s'_m + s''_m$  où

$$s'_m = \sum_{\alpha=1}^q \lambda_{\alpha,m} z_{L_\alpha} \text{ et } (K_X + \varepsilon H) \cdot s''_m \geq 0.$$

Comme avant, on peut supposer quitte à extraire des sous-suites que les suites  $(s''_m)$  et  $(\lambda_{\alpha,m} z_{L_\alpha})_m$  convergent vers des multiples positifs de  $r$ . Puisque  $(K_X + \varepsilon H) \cdot r < 0$ , la limite de  $(s''_m)$  doit être nulle, donc  $r$  engendre un des  $F_{L_\alpha}$ , donc  $R = F_{L_\alpha}$  et  $W$  est fermé.  $\square$

## 6 Programme des modèles minimaux

**Lemme 6.1** *Pour toute arête extrême  $R$  de  $\overline{NE(X)}$  rencontrant  $\overline{NE(X)}_{K_X < 0}$ , il existe un diviseur nef  $H_R$  tel que  $H_R \cdot z = 0$  si et seulement si  $z \in R$ .*

DÉMONSTRATION :

On l'a montré dans l'étape 5 de la démonstration du théorème du cône.  $\square$

**Définition 6.2** Soit  $R$  une arête extrême de  $\overline{NE(X)}$  rencontrant  $\overline{NE(X)}_{K_X < 0}$ . Une *contraction extrême* de  $R$  est un morphisme projectif  $\varphi : X \rightarrow Z$  surjectif sur une variété projective et normale  $Z$  vérifiant

- (i) Pour toute courbe irréductible  $C \subset X$ ,  $\varphi(C)$  est un point si et seulement si  $[C] \in R$ .
- (ii) Les fibres de  $\varphi$  sont connexes, c'est à dire  $\varphi_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Z$ .

(iii)  $H_R = \varphi^*(A)$  pour  $A \in \text{Pic}(Z)$  ample.

**Théorème 6.3** (de contraction) *Pour chaque arête extrême  $R$  de  $\overline{NE(X)}$  rencontrant  $\overline{NE(X)}_{K_X < 0}$ , il existe une contraction extrême  $\varphi_R : X \rightarrow Z$ . De plus,  $\varphi_R$  est d'un type suivant :*

- (i)  $Z$  est une surface lisse et  $X$  est obtenu à partir de l'éclatement d'un point. De plus,  $\rho(Z) = \rho(X) - 1$ .
- (ii)  $Z$  est une courbe lisse et  $X$  est une surface réglée sur  $Z$ . De plus,  $\rho(X) = 2$ .
- (iii)  $Z$  est un point,  $\rho(X) = 1$  et  $-K_X$  est ample. En fait  $X \cong \mathbb{P}^2$ .

DÉMONSTRATION :

Soit  $H_R$  comme dans le lemme ci-dessus. Par le critère de Kleiman et un argument de compacité, il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $mH_R - K_X$  est ample. On peut donc appliquer le théorème BPF, et on conclut que  $mH_R$  est libre pour  $m \gg 0$ . Par la factorisation de Stein, on obtient ainsi une application  $\varphi_R : X \rightarrow Z$  qui est une contraction extrême associée à  $R$ . On reprend les trois cas de la démonstration du BPF.

**Cas 1 :** Comme dans la démonstration du BPF, il existe une courbe  $(-1)$   $C$  contractée par  $\varphi_R$ . Comme  $[C]$  engendre  $R$  et que deux telles courbes ne sont pas numériquement équivalentes, l'application  $\varphi_R$  ne contracte que  $C$ . Par le théorème de Castelnuovo, on obtient que  $Z$  est lisse et que  $\varphi_R$  est l'éclatement d'un point.

**Cas 2 :** Comme dans la démonstration du BPF, on obtient que  $Z$  est une courbe lisse. Soit  $F = \sum a_i C_i$  avec  $a_i \in \mathbb{N}^*$  une fibre et soit  $C$  une fibre générale telle que  $[C] = [F]$ . Alors  $[F]$  engendre  $R$  qui est extrême, donc chaque  $[C_i] \in R$ . Ainsi, on a  $C_i^2 = 0$ ,  $C_i \cdot K_X < 0$  et par suite avec la formule du genre  $C_i \cdot K_X = 2$  et  $C_i \simeq \mathbb{P}^1$  (De même pour  $C$ ). Ainsi

$$-2 = C \cdot K_X = F \cdot K_X = \sum a_i (C_i \cdot K_X) = -2 \sum a_i.$$

Finalement, il existe un indice  $i$  tel que  $F = C_i \simeq \mathbb{P}^1$ , donc  $X$  est une surface réglée et par le théorème 2.19, on a que  $\rho(X) = 2$ .

**Cas 3 :** Dans la démonstration du BPF, on a vu que  $H_R = 0$ , donc  $Z$  est un point. Ainsi

$$\overline{NE(X)} = R = \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \text{Ample}(X) = \mathbb{R}_+^*.$$

Comme  $R$  rencontre  $\overline{NE(X)}_{K_X < 0}$ , on a que  $-K_X$  est ample. Finalement  $X$  est une surface Del Pezzo avec  $\rho(X) = 1$ , donc  $X \cong \mathbb{P}^2$  (voir [5]).  $\square$

**Remarque :** On en déduit que chaque arête extrême  $R_i$  de  $\overline{NE(X)}$  rencontrant  $\overline{NE(X)}_{K_X < 0}$  est engendrée par la classe d'une courbe irréductible et rationnelle  $C_i$  de  $X$  vérifiant

$$1 \leq -K_X \cdot C_i \leq 3.$$

**Théorème 6.4** (MMP) *Si  $X$  est une surface minimale, alors  $X$  vérifie une et une seule des propriétés suivantes :*

- (i)  $K_X$  est nef.
- (ii)  $X$  est une surface réglée.
- (iii)  $X \cong \mathbb{P}^2$ .

DÉMONSTRATION :

Comme  $X$  est minimale, elle ne contient pas de courbe  $(-1)$ , sinon on peut la contracter par le théorème de Castelnuovo. Si  $K_X$  n'est pas nef, alors on a par le théorème du cône de Mori

qu'il existe une arête extrême  $R$  de  $\overline{NE(X)}$  rencontrant  $\overline{NE(X)}_{K_X < 0}$ . Comme il n'y a pas de courbe  $(-1)$  dans  $X$ , on ne peut pas se trouver dans le premier cas du théorème de contraction, donc  $X$  est une surface réglée ou  $X$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^2$ .  $\square$

**Proposition 6.5** *Si  $\pi : X \rightarrow Y$  est une application birationnelle entre surface et que  $K_Y$  est nef, alors  $\pi$  est un morphisme.*

DÉMONSTRATION :

Par le théorème 2.16, il existe une surface  $S$  et des morphismes  $f : S \rightarrow X$  et  $g : S \rightarrow Y$  composés d'éclatements et d'isomorphismes tels que  $\pi \circ f = g$ .

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ X & \xrightarrow{\pi} & Y \end{array}$$

Supposons que  $\pi$  n'est pas un morphisme. Alors  $f$  n'est pas un isomorphisme et l'on peut considérer  $C \subset S$  la courbe  $(-1)$  créée par le dernier éclatement dans  $f$ . De plus, quitte à supposer que le nombre d'éclatement dans  $f$  est minimal, on peut supposer que  $g$  ne contracte pas  $C$ . Alors, en utilisant le théorème 2.13 et une récurrence, on obtient que

$$-1 = K_S \cdot C = K_Y \cdot g_*(C) \geq 0$$

car  $K_Y$  est nef.  $\square$

**Remarque :** On en déduit que si  $\mathcal{B}(X)$  contient une surface minimale  $X_{min}$  avec  $K_{X_{min}}$  nef, alors il n'y a pas d'autre surface minimale dans  $\mathcal{B}(X)$ .

On a donc vu comment, à partir d'une surface  $X$ , on pouvait construire une surface minimale  $X_{min}$  birationnelle à  $X$ . Par construction, la surface  $X_{min}$  ne contient pas de courbe  $(-1)$ . Par le théorème MMP, on a que  $X_{min}$  se trouve dans l'un des cas suivants :

**Cas 1 :** Soit  $K_{X_{min}}$  est nef et dans ce cas, on a par la remarque ci-dessus qu'il n'y a pas d'autre surface minimale dans  $\mathcal{B}(X)$ .

**Cas 2 :** Il existe une courbe irréductible et rationnelle  $C$  de  $X_{min}$  vérifiant  $K_{X_{min}} \cdot C < 0$  et  $C^2 \geq 0$  (Sinon  $C$  est une courbe  $(-1)$  avec la formule du genre). Par le lemme 3.5 on a

1. Si  $C^2 = 0$ , alors  $X_{min}$  est une surface réglée.
2. Si  $C^2 > 0$ , alors  $X_{min}$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^2$ .

Il peut y avoir plusieurs surfaces minimales dans  $\mathcal{B}(X)$ . Par exemple,  $\mathbb{P}^2$  et  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  sont des surfaces minimales non isomorphes et birationnelles.

On peut se demander comment distinguer si l'on se trouve dans le cas 1 ou le cas 2 à partir de la surface  $X$ . On peut par exemple utiliser la dimension de Kodaira.

**Définition 6.6** Soit  $X$  une surface. On définit la *dimension de Kodaira* de  $X$ , notée  $kod(X)$  par :

- Si  $h^0(X, mK_X) = 0$  pour tout  $m > 0$ , on pose  $kod(X) = -\infty$ .
- Sinon, on désigne par  $\varphi_{mK_X}$  l'application rationnelle associée à  $mK_X$  et on pose

$$kod(X) = \max\{\dim(\varphi_{mK_X}(X)) \mid m \in \mathbb{N}^*\}.$$



On peut montrer que la dimension de Kodaira est un invariant birationnel. De plus, on a le résultat suivant.

**Théorème 6.7** (d'Enriques) *Une surface  $X$  est birationnelle à une surface réglée si et seulement si  $\text{kod}(X) = -\infty$ .*

**Remarque :** Si l'on veut étudier si deux surfaces  $X$  et  $Y$  avec  $\text{kod}(X) = \text{kod}(Y)$  sont birationnelles, on a deux cas :

- (i) Si  $\text{kod}(X) = \text{kod}(Y) \geq 0$ , notre problème est équivalent à étudier si  $X_{\min}$  et  $Y_{\min}$  sont isomorphes.
- (ii) Si  $\text{kod}(X) = \text{kod}(Y) = -\infty$ , alors on peut montrer que  $X_{\min}$  et  $Y_{\min}$  sont birationnelles respectivement à  $C_X \times \mathbb{P}^1$  et  $C_Y \times \mathbb{P}^1$  où  $C_X$  et  $C_Y$  sont des courbes lisses et projectives ne dépendant que de  $\mathcal{B}(X)$  et  $\mathcal{B}(Y)$  (voir [1]). Notre problème est alors équivalent à étudier si les courbes  $C_X$  et  $C_Y$  sont isomorphes.

## Bibliographie

- [1] A. BEAUVILLE – *Complex algebraic surfaces*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 68, Cambridge University Press, Cambridge, 1983, Translated from the French by R. Barlow, N. I. Shepherd-Barron and M. Reid.
- [2] H. CLEMENS, J. KOLLÁR et S. MORI – « Higher-dimensional complex geometry », *Astérisque* (1988), no. 166, p. 144 pp. (1989).
- [3] O. DEBARRE – *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [4] R. HARTSHORNE – *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [5] J. KOLLÁR – *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 32, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [6] M. ANDREATTA – « An introduction to mori theory : the case of surfaces », "<http://alpha.science.unitn.it/~andreatt/scuoladott1.pdf>".