CHAPITRE 4
Séries numériques

Exercice 1 :

(i) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1,$$

donc la série converge et sa somme vaut 1.

(ii) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(N+1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty,$$

donc la série diverge.

(iii) Pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

donc la série converge et sa somme vaut $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(iv) Pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)\\ &= \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1) - 2\ln(n) + \ln(n-1)\\ &= \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1) - \ln(n) + \sum_{n=2}^{N} \ln(n-1) - \ln(n)\\ &= \ln(N+1) - \ln(2) - \ln(N) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)\\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} -\ln(2),\end{aligned}$$

donc la série converge et sa somme vaut $-\ln(2)$.

Exercice 2 :

(i) Si $|x| \geqslant 1$, alors la suite $(kx^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum kx^k$ diverge grossièrement.

(ii) Pour $|x| < 1$, on a l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}.$$

En dérivant cette égalité, on trouve

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2},$$

puis en multipliant par x, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = x\frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}.$$

(iii) Comme $|x| < 1$, on obtient avec l'égalité précédente

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2},$$

donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} kx^k$ converge et sa somme vaut $\dfrac{x}{(1-x)^2}$.

Exercice 3 :

(i) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 2\mathrm{e},$$

donc la série converge et sa somme vaut 2e.

(ii) En écrivant $n^2-2 = n(n-1)+n-2$, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n^2-2}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!} - 2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} - 2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0,$$

donc la série converge et sa somme vaut 0.

(iii) En écrivant

$$n^3 = n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n,$$

on obtient en procédant comme ci-dessus

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n^3}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + 3\sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n!} = \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n-3)!} + 3\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{N-3} \frac{1}{n!} + 3\sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 5\mathrm{e},$$

donc la série converge et sa somme vaut 5e.

Exercice 4 : On note u_n le terme général de la série que l'on étudie.

(i) On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} 2/n^2 \geqslant 0$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum u_n$ converge par comparaison.

(ii) On a l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |u_n| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Or $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, donc $\sum u_n$ converge par comparaison.

(iii) On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} 1$, donc la suite (u_n) ne converge pas vers 0 et $\sum u_n$ diverge grossièrement.

(iv) La suite $(|u_n|)$ est strictement positive et on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)^4}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{n^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{4} < 1,$$

donc la série $\sum u_n$ converge absolument d'après la règle de d'Alembert, donc elle converge.

(v) On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \pi^2/2n^2$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum u_n$ converge par comparaison.

(vi) La suite (u_n) diverge vers $+\infty$, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

(vii) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{\mathrm{e}^{n+1}} \cdot \frac{\mathrm{e}^n}{n^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}.$$

On en déduit que (u_{n+1}/u_n) converge vers $\mathrm{e}^{-1} < 1$, donc la série $\sum u_n$ converge d'après le règle de d'Alembert.

$(viii)$ En utilisant l'inégalité $|\sin(x)| \leqslant |x|$ et en majorant le cos par 1, on obtient

$$0 \leqslant |u_n| \leqslant \frac{\pi}{n^2}.$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum u_n$ converge absolument par comparaison, donc elle converge.

(ix) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2\sin(\pi/2^{n+1})}{n^2\sin(\pi/2^n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi/2^{n+1}}{\pi/2^n} = \frac{1}{2} < 1,$$

donc $\sum u_n$ converge d'après la règle de d'Alembert.

(x) On a l'inégalité

$$0 \leqslant \frac{|\cos(n)|}{n^3-n} \leqslant \frac{1}{n^3-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}.$$

Or $\sum \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum \frac{1}{n^3-n}$ est une série convergente par comparaison. On en déduit que $\sum u_n$ converge absolument par comparaison, donc $\sum u_n$ converge.

(xi) Avec un développement limité, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \mathrm{e} - \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{e} - \exp\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \mathrm{e} - \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{e} - \mathrm{e}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \mathrm{e} - \mathrm{e}\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\mathrm{e}}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{2n} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Or $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, donc $\sum u_n$ diverge par comparaison.

(xii) La suite (u_n) est strictement positive et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)^2}}{n^n\mathrm{e}^{-n^2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)\mathrm{e}^{-2n-1}.$$

De plus, on a avec un développement limité

$$\left(1-\frac{1}{nn}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(1+o(1)\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathrm{e}.$$

On en déduit que (u_{n+1}/u_n) converge vers $0<1$, donc la série $\sum u_n$ converge d'après le règle de d'Alembert.

$(xiii)$ La suite (u_n) est strictement positive et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\cdot\frac{n^n}{n!} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

De plus, on a avec un développement limité

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{n}{n+1} + o\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}. \end{aligned}$$

On en déduit que (u_{n+1}/u_n) converge vers $\mathrm{e}^{-1}<1$, donc la série $\sum u_n$ converge d'après le règle de d'Alembert.

(xiv) En utilisant la formule d'addition du sinus, on a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Ainsi $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \pi/n^2 \geqslant 0$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc la série $\sum u_n$ converge absolument par comparaison, donc elle converge.

(xv) En multipliant par l'expression conjuguée, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{(n^2+1)(n^2-1)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n^4-1}\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Or $\sum \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum u_n$ converge par comparaison.

(xvi) On a l'inégalité $0 \leqslant n^{-1} \leqslant u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $\sum n^{-1}$ est une série de Riemann divergente, donc $\sum u_n$ diverge par comparaison.

$(xvii)$ La suite (u_n) est strictement positive et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\cdot 4\cdots(2n)\cdot(2n+2)}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2\cdot 4\cdots(2n)} = 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right)\\ &= \exp\left(-\frac{n}{n+1}+o\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

On en déduit que (u_{n+1}/u_n) converge vers $2\mathrm{e}^{-1}<1$, donc la série $\sum u_n$ converge d'après le règle de d'Alembert.

$(xviii)$ On a l'inégalité

$$0\leqslant u_n\leqslant\frac{(n-1)(n-1)!+n!}{(n+2)!}\leqslant\frac{(n-1)}{n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\leqslant\frac{2}{n^2}.$$

Or $\sum\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum u_n$ converge par comparaison.

Exercice 5 : On a l'inégalité

$$\forall t\in[0,\pi],\quad 0\leqslant\frac{\sin(t)}{1+t}\leqslant\frac{t}{1+t}\leqslant t,$$

donc en intégrant, on obtient

$$0\leqslant u_n\leqslant\int_0^{\pi/n} t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{2n^2}.$$

Or $\sum\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc la série $\sum u_n$ est convergente par comparaison.

Exercice 6 : On note u_n le terme général de la série.

(i) On distingue trois cas.

- Cas $|a|>1$. Dans ce cas, on a

$$|u_n|\underset{+\infty}{\sim}\frac{|a|^n}{a^{2n}}=\frac{1}{|a|^n}\geqslant 0.$$

  Or la série $\sum\frac{1}{|a|^n}$ est une série géométrique convergente, donc la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.
- Cas $|a|=1$. La suite (u_n) ne converge pas vers 0, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Cas $|a|<1$. Dans ce cas, on a $|u_n|\underset{+\infty}{\sim}|a|^n\geqslant 0$. Or la série $\sum|a|^n$ est une série géométrique convergente, donc la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.

Finalement, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $|a|\neq 1$.

(ii) La suite u_n est strictement positive. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{a(n+1)}}\cdot\frac{n^{an}}{n!}=(n+1)^{1-a}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{an}.$$

De plus, on a avec un développement limité

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{an} &= \exp\left(na\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right)\\ &= \exp\left(-\frac{na}{n+1}+o\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{}\exp(-a).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\begin{cases}+\infty & \text{si}\quad a<1\\ \mathrm{e}^{-1} & \text{si}\quad a=1\\ 0 & \text{si}\quad a>1.\end{cases}$$

Finalement, d'après le règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a\geqslant 1$.

Exercice 7 :

1. On déterminer un équivalent de (u_n) en utilisant des développements limités. On a

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
$$\ln(n+2) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = \ln(n) + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit

$$u_n = (1+a+b)\ln(n) + \frac{a+2b}{n} - \frac{a+4b}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- Si $a+b \neq -1$, alors la suite (u_n) ne converge pas vers 0, donc la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $a+b=-1$ et $a+2b \neq 0$, alors

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{a+2b}{n} = v_n.$$

Or la suite (v_n) est de signe constant et la série $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, donc la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $a+b=-1$ et $a+2b=0$ équivaut à $a=-2$ et $b=1$. Dans ce cas, on a

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2} \leqslant 0,$$

or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.

Finalement $\sum u_n$ converge si et seulement si $a=-2$ et $b=1$.

2. Pour calculer la somme de la série, on calcule la suite des sommes partielles. Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \ln(n) - \ln(n+1) + \sum_{n=1}^{N} \ln(n+2) - \ln(n+1) \\ &= \ln(1) - \ln(N+1) + \ln(N+2) - \ln(2) = -\ln(2) + \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} -\ln(2), \end{aligned}$$

donc la somme de la série $\sum u_n$ vaut $-\ln(2)$.

Exercice 8 : On déterminer un équivalent de (u_n) en utilisant des développements limités. On a

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{n^3+an} &= n\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{1/3} = n\left(1+\frac{a}{3n^2} - \frac{a^2}{9n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\ &= n + \frac{a}{3n} - \frac{a^2}{9n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2+3} &= n\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{1/2} = n\left(1+\frac{3}{2n^2} - \frac{9}{8n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\ &= n + \frac{3}{2n} - \frac{9}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

On en déduit

$$u_n = \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{9}{8} - \frac{a^2}{9}\right)\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

- Si $a \neq 9/2$, on obtient

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n} = v_n.$$

Or la suite (v_n) est de signe constant et $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, donc la série $\sum u_n$ diverge.

- Si $a = 9/2$, on obtient
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{9}{8n^3} \leqslant 0.$$
Or la série $\sum \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente, donc la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.

Finalement $\sum u_n$ converge si et seulement si $a = 9/2$.

Exercice 9 :

(i) On a l'inégalité
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \max(u_n, v_n) \leqslant u_n + v_n.$$
Or la série $\sum(u_n + v_n)$ est convergente, donc $\sum \max(u_n, v_n)$ est convergente par comparaison.

(ii) On a l'inégalité
$$0 \leqslant (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{u_n + v_n}{2}.$$
Or la série $\sum(u_n + v_n)$ est convergente, donc $\sum \sqrt{u_n v_n}$ est convergente par comparaison.

(iii) En utilisant la même inégalité que dans (ii), on a
$$0 \leqslant \frac{u_n v_n}{u_n + v_n} \leqslant \frac{u_n^2}{2(u_n + v_n)} + \frac{v_n^2}{2(u_n + v_n)} \leqslant \frac{u_n + v_n}{2}.$$
Or la série $\sum(u_n + v_n)$ est convergente, donc $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ est convergente par comparaison.

Exercice 10 :

1. La suite (u_n) est positive, donc $0 \leqslant e^{-u_{n-1}} \leqslant 1$. On en déduit que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n = \frac{e^{-u_{n-1}}}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$
On en déduit avec le théorème d'encadrement que (u_n) converge vers 0.

2. Comme (u_n) converge vers 0, on a
$$u_n = \frac{e^{-u_{n-1}}}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \geqslant 0.$$
Or la suite (u_n) est positive et $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, donc la série $\sum u_n$ est divergente par comparaison.

Exercice 11 : On montre les deux implications.

- Si $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 0. Ainsi, on a $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n \geqslant 0$, donc la série $\sum v_n$ converge par comparaison.
- Réciproquement, si $\sum v_n$ converge, alors la suite (v_n) converge vers 0. De plus, on peut écrire
$$(1 + u_n)v_n = u_n \quad \Leftrightarrow \quad v_n = u_n(1 - v_n),$$
donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \geqslant 0$, donc $\sum v_n$ converge par comparaison.

Exercice 12 :

(i) La fonction
$$f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{t\ln(t)}$$
est continue, décroissante et positive. D'après le théorème de comparaison série - intégrale, on en déduit que
$$\sum \frac{1}{n\ln(n)} \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad I = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln(t)} \text{ converge.}$$
Or pour tout réel $\beta > 2$, on a
$$\int_2^{\beta} \frac{dt}{t\ln(t)} = [\ln(\ln(t))]_2^{\beta} = \ln(\ln(\beta)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} +\infty.$$
Ainsi l'intégrale I est divergente, donc la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ est divergente.

(ii) La fonction

$$f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{t\ln^a(t)}$$

est continue et positive. De plus, f est dérivable et on a

$$\forall t \in [2, +\infty[, \quad f'(t) = \frac{\ln^{a-1}(t)(a + \ln(t))}{t^2\ln^{2a}(t)}.$$

Comme $f'(t) \leqslant 0$ au voisinage de $+\infty$, on en déduit que f est décroissante au voisinage de $+\infty$. D'après le théorème de comparaison série - intégrale, on en déduit que

$$\sum \frac{1}{n\ln^a(n)} \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad I_a = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^a(t)} \text{ converge.}$$

Or pour tout réel $\beta > 2$, comme $a \neq 1$, on a

$$\int_2^\beta \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^a(t)} = \left[\frac{\ln^{1-a}(t)}{1-a}\right]_2^\beta = \frac{\ln^{1-a}(\beta)}{1-a} - \frac{\ln^{1-a}(2)}{1-a}.$$

En prenant la limite lorsque a tend vers $+\infty$, on en déduit que I_a converge si et seulement si $a > 1$. Finalement, la série $\sum \frac{1}{n\ln^a(n)}$ converge si et seulement si $a > 1$.

(iii) La fonction

$$f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{t\ln(t)\ln(\ln(t))}$$

est continue, décroissante et positive. D'après le théorème de comparaison série - intégrale, on en déduit que

$$\sum \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))} \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad I = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)\ln(\ln(t))} \text{ converge.}$$

Or pour tout réel $\beta > 2$, on a

$$\begin{aligned}\int_2^\beta \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)\ln(\ln(t))} &= [\ln(\ln(\ln(t)))]_2^\beta \\ &= \ln(\ln(\ln(\beta))) - \ln(\ln(\ln(2))) \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} +\infty.\end{aligned}$$

Ainsi l'intégrale I est divergente, donc la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$ est divergente.

Exercice 13 : En encadrant les sommes avec des intégrales, on trouve

(i) $S_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$, (ii) $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$, (iii) $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$,

(iv) $S_n \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$, (v) $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n}}$, (vi) $S_n \underset{+\infty}{\sim} n\ln^2(n)$,

(vii) $S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$, $(viii)$ $U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{4\sqrt{2}-2}{3}n\sqrt{n}$.

Exercice 14 :

1. On a l'équivalent
$$\left|\frac{a}{n^2+a^2}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{a}{n^2}.$$
Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série définissant $S(a)$ converge absolument par comparaison, donc elle converge.
2. La fonction $t \mapsto a/(t^2+a^2)$ est décroissante et continue, donc on obtient l'encadrement
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \int_n^{n+1} \frac{a\,\mathrm{d}t}{t^2+a^2} \leqslant \frac{a}{n^2+a^2} \leqslant \int_{n-1}^n \frac{a\,\mathrm{d}t}{t^2+a^2}.$$
En sommant ces inégalités pour $1 \leqslant n \leqslant N$, on obtient
$$\int_1^{N+1} \frac{a\,\mathrm{d}t}{t^2+a^2} \leqslant \sum_{n=1}^N \frac{a}{n^2+a^2} \leqslant \int_0^N \frac{a\,\mathrm{d}t}{t^2+a^2}.$$
En calculant les intégrales, on obtient
$$\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{a}\right)\right]_1^{N+1} \leqslant \sum_{n=1}^N \frac{a}{n^2+a^2} \leqslant \left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{a}\right)\right]_0^N,$$
puis en faisant tendre N vers $+\infty$, on a
$$\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) \leqslant S(a) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

3. Finalement, dans l'inégalité précédentes, les membres de droites et gauches tendent vers $\pi/2$ lorsque $a \to +\infty$. On en déduit avec le théorème d'encadrement que $\lim\limits_{a\to+\infty} S(a) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 15 :

1. On montre que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   - La suite (u_n) est décroissante, car
   $$u_{n+1} - u_n = (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant 0.$$
   - La suite (v_n) est croissante, car
   $$u_{n+1} - u_n = (H_{n+1} - \ln(n+2)) - (H_n - \ln(n+1)) = \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \geqslant 0.$$
   - On a
   $$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   Finalement, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Comme les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles convergent vers un réel γ. Autrement dit, on a $u_n = \gamma + o(1)$, ce qui donne $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$\frac{1}{n(2n-1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{(a+2b)n - b}{n(2n-1)}.$$
   On en déduit que $a + 2b = 0$ et $-b = 1$ ce qui équivaut à $(a,b) = (2,-1)$.
4. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(2n-1)} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{(2n-1)} - \frac{1}{n} = 2\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(2n-1)} + \frac{1}{2n}\right) - 2H_N \\ &= 2H_{2N} - 2H_N = 2(\ln(2N) + \gamma + o(1)) - 2(\ln(N) + \gamma + o(1)) \\ &= 2\ln(2) + o(1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 2\ln(2),\end{aligned}$$
   donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(2n-1)}$ converge et sa somme vaut $2\ln(2)$.