CHAPITRE 4
Séries numériques

I - Convergence des séries numériques

Exercice 1 : Étudier la convergence des séries suivantes, puis en cas de convergence, calculer leur somme.

$$(i)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)},\qquad (ii)\ \sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right),$$
$$(iii)\ \sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}},\qquad (iv)\ \sum_{n\geqslant 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 2 : Soient $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que si $|x|\geqslant 1$, alors la série $\sum kx^k$ est divergente.
2. On suppose que $|x|<1$. En calculant la dérivée de la fonction $x\mapsto\sum_{k=0}^{n}x^k$ de deux façons, déterminer une expression de la somme $\sum_{k=0}^{n}kx^k$.
3. En déduire que si $|x|<1$, alors la série $\sum_{k\geqslant 0}kx^k$ est convergente et déterminer sa somme.

Exercice 3 : On admet que $\mathrm{e}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$. Monter la convergence des sommes suivantes et calculer leur somme.

$$(i)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{n!},\qquad (ii)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2-2}{n!},\qquad (iii)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3}{n!}.$$

Exercice 4 : Étudier la convergence des séries de terme général suivant.

$$(i)\ \frac{2n-1}{n^3+1},\qquad (ii)\ \frac{\sin(n)}{2^n},\qquad (iii)\ n\sin\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$(iv)\ \frac{n^2}{(-4)^n},\qquad (v)\ 1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right),\qquad (vi)\ 2^n n,$$
$$(vii)\ n^2\mathrm{e}^{-n},\qquad (viii)\ n\cos(n)\sin\left(\frac{\pi}{n^3}\right),\qquad (ix)\ n^2\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right),$$
$$(x)\ \frac{\cos(n)}{n^3-n},\qquad (xi)\ \mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\qquad (xii)\ n^n\mathrm{e}^{-n^2},$$
$$(xiii)\ \frac{n!}{n^n},\qquad (xiv)\ \frac{1}{n}\sin\left(\left(n+\frac{1}{n}\right)\pi\right),\qquad (xv)\ \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}},$$
$$(xvi)\ \frac{\ln^2(n)}{n},\qquad (xvii)\ \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{n^n},\qquad (xviii)\ \frac{1!+\cdots+n!}{(n+2)!}.$$

Exercice 5 : Étudier la convergence de la série de terme général défini par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\int_0^{\pi/n}\frac{\sin(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6 : Soit $a\in\mathbb{R}$. Étudier la convergence des séries

$$(i)\ \sum\frac{a^n}{1+a^{2n}},\qquad (ii)\ \sum\frac{n!}{n^{an}}.$$

Exercice 7 : Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On note

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2).$$

1. Pour quelle valeur de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?
2. Dans ce cas, calculer la somme $\sum u_n$.

Exercice 8 : Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la série de terme général u_n défini ci-dessous converge-t-elle ?

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2+3}.$$

Exercice 9 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les séries suivantes sont convergentes.

$$(i)\ \sum \max(u_n, v_n), \quad (ii)\ \sum \sqrt{u_n v_n}, \quad (iii)\ \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Exercice 10 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0, +\infty[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}.$$

Montrer que (u_n) converge vers 0 et étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 11 : Soit (u_n) une suite de réels positifs. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Montrer que $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\sum v_n$ est convergente.

II - Comparaison séries-intégrales

Exercice 12 : Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. En utilisant une comparaison série - intégrale, étudier la convergence des séries suivantes.

$$(i)\ \sum \frac{1}{n\ln(n)}, \quad (ii)\ \sum \frac{1}{n\ln^a(n)}, \quad (iii)\ \sum \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}.$$

Exercice 13 : En utilisant une comparaison série - intégrale, déterminer un équivalent des suites suivantes.

$$(i)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad (ii)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad (iii)\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}, \quad (iv)\ \ln(n!),$$

$$(v)\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}, \quad (vi)\ \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k), \quad (vii)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}, \quad (viii)\ \sum_{k=n+1}^{2n} \sqrt{k}.$$

Exercice 14 : Pour $a \in \mathbb{R}$, on note

$$S(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

1. Montrer que la série définissant $S(a)$ est convergente.
2. Encadrer $S(a)$ avec des intégrales pour tout $a > 0$.
3. En déduire la limite de $S(a)$ lorsque $a \to +\infty$.

III - Développement asymptotique de la série harmonique

Exercice 15 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad u_n = H_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. En déduire qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que
$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$
3. Montrer qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{n}.$$
4. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(2n-1)}$ est convergente et calculer sa somme en utilisant les questions précédentes.