CHAPITRE 4
Séries numériques

Plan du chapitre

Introduction

L'objet de l'étude des séries numériques est de donner un sens à des sommes infinies de nombres réels ou de nombres complexes. Les premières traces d'utilisation d'une somme infinie remontent à l'antiquité lorsque Archimède a calculé l'aire de la surface comprise entre une parabole et une de ses cordes par la méthode d'exhaustion. Ce dernier a implicitement démontré la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots = \frac{1}{3}.$$

Au cours du XIVe siècle, Nicolas Oresme démontre que la série harmonique est divergente, ce que l'on peut reformuler intuitivement par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty.$$

À la même époque, le mathématicien indien Madhava de Sangamagrama est le premier à considérer des développements de fonctions trigonométriques sous forme de série. Par exemple, il a calculé les onze premières décimales du nombre π en établissant la formule

$$\forall x \in [-1,1], \quad \operatorname{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Au XVIIe siècle, ces résultats sont redécouverts en Europe par James Gregory. Finalement, en donnant la construction générale des séries portant son nom, Brook Taylor établit en 1715 un lien fructueux avec le calcul différentiel.

En mathématiques, la notion de série nous permettra de définir de nouvelles fonctions en utilisant une somme infinie. Nous étudierons par exemple les séries entières et les séries de Fourier dans des chapitres ultérieurs. Ces dernières sont importantes en physique et en science de l'ingénieur : elles permettent de décomposer un signal périodique en une superposition de signaux sinusoïdaux.

Dans ce chapitre, nous commencerons par donner un sens à la notion de somme infinie en définissant une série. Ensuite, nous étudierons quelques séries remarquables et nous établirons des critères de convergences.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

I - Convergence d'une série numérique

I.A - Généralités

On fixe une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Définition (Série numérique) : La série de terme général u_n, notée $\sum u_n$, est la suite $(S_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n.$$

La suite (S_n) est appelée la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

Définition (Série convergente et divergente) : On dit que la série $\sum u_n$ est convergente si sa suite des sommes partielles (S_n) est convergente. Dans le cas contraire, on dit que la série est divergente.

Définition (Somme et reste d'une série) : Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors

(i) On appelle somme de la série sa limite S et on note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

(ii) Le reste d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la série est le nombre $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Remarques 1 :

a) Si la série commence à un indice $p \in \mathbb{N}$, on notera $\sum_{n \geqslant p} u_n$.

b) Si la série est convergente, sa somme est noté $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$.

c) La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes.

Exemples 1 :

a) La série $\sum_{n \geqslant 0} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ est divergente, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \sqrt{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

b) La série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{4^n}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}$, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1-(1/4)^{n+1}}{1-1/4} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{4}{3}.$$

Proposition 1 : Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 0.

Définition (Divergence grossière) : Si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exemple 2 : Les séries $\sum n$ et $\sum (-1)^n$ divergent grossièrement.

ATTENTION : La réciproque est fausse ! La suite (u_n) définie dans l'exemple 1a) converge vers 0, mais nous avons montré que $\sum u_n$ est divergente.

Proposition (Linéarité de la somme) : Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors la série $\sum (au_n + bv_n)$ est convergente et on a la relation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (au_n + bv_n) = a\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) + b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Proposition 2 : La suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

I.B - Série géométrique

Définition (Série géométrique) : Pour tout $q \in \mathbb{C}$, la série $\sum q^n$ s'appelle la série géométrique de raison q.

Proposition 3 : Soit $q \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si on a l'inégalité $|q| < 1$. Dans ce cas, sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Remarque 2 : Si $q \in \mathbb{C}$ avec $|q| < 1$ et $p \in \mathbb{N}$, on a plus généralement $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} q^n = \frac{q^p}{1-q}$.

Exemple 3 : Le série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente et sa somme est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$.

II - Séries à termes positifs

II.A - Les règles de comparaisons

Lemme 1 : Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite positive. La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si sa suite des sommes partielles de la série est majoré.

Théorème de comparaison N° 1 : Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant l'inégalité $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

(ii) Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

Remarque 3 : Dans le cas (i), on a en plus l'inégalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Exemple 4 : On souhaite étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-n}}{n+1}$. Comme

$$\left(\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant \frac{e^{-n}}{n+1} \leqslant e^{-n}\right) \qquad \text{et} \qquad \sum e^{-n} \text{ converge,}$$

on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-n}}{n+1}$ est convergente par comparaison.

Théorème de comparaison N° 2 : Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que (u_n) est de signe constant au voisinage de $+\infty$ et que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. On a alors

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum v_n \text{ converge.}$$

Exemple 5 : On souhaite étudier la convergence de la série $\sum \sin\left(2^{-n}\right)$. Comme

$$\sin\left(2^{-n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2^{-n} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sum 2^{-n} \text{ converge,}$$

on en déduit que la série $\sum \sin\left(2^{-n}\right)$ est convergente par comparaison.

Proposition (Règle de d'Alembert) : Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que $\displaystyle\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

(i) Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

ATTENTION : Si $\ell = 1$, on ne peut pas dire si la série converge ou diverge.

Exemple 6 : On souhaite étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n!}$. En notant u_n le terme général de la série S, on a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1,$$

donc la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n!}$ est convergente par la règle de d'Alembert.

II.B - Comparaison séries-intégrales

Théorème de comparaison séries-intégrales : Si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue positive et décroissante, alors la série $\sum_{n \geqslant a} f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Remarques 4 :

a) La démonstration de ce théorème est basé sur l'encadrement d'une somme par des intégrales qui est expliqué dans la dernière partie du cours.

b) Comme la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, il suffit que les hypothèses sur f soit vérifiées au voisinage de $+\infty$.

Définition (Série de Riemann) : Pour $a \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^a}$ s'appelle une série de Riemann.

Corollaire 1 : Pour $a \in \mathbb{R}$, la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si on a l'inégalité $a > 1$.

III - Séries absolument convergentes

On fixe une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Définition (Convergence absolue) : On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 1 : Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge.

Exemple 7 : La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument, donc elle converge.

ATTENTION : La réciproque du théorème précédent est fausse. Par exemple, on peut montrer que $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, mais qu'elle ne converge pas absolument.

Proposition (Inégalité triangulaire) : Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente, alors on a

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

IV - Développement décimal d'un nombre réel

Théorème 2 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une unique suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers vérifiant

(i) $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in [\![0, 9]\!]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

(ii) La suite (a_n) n'est pas stationnaire en 9,

(iii) On a $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 10^{-n}$.

Définition (Développement décimal d'un nombre réel) : La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'appelle le développement décimal du réel x.

Remarques 5 :

a) Le réel a_0 est la partie entière de x et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite de ses décimales.

b) La condition (ii) assure l'unicité du développement. En effet, on a la relation

$$0,999\ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-n} = \frac{9 \cdot 10^{-1}}{1 - 10^{-1}} = 1,000\ldots.$$

Théorème 3 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Le nombre x est rationnel si et seulement si son développement décimal $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.

Exemple 8 : On a

$$\frac{139}{108} = 1,28\,703\,703\,703\ldots$$

V - Méthodes

V.A - Étudier la convergence d'une série

On souhaite étudier le convergence d'une série $\sum u_n$ où $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Méthode : Étudier la convergence d'une série
On essaye d'utiliser les différents résultats du cours dans l'ordre suivant.

1) On vérifie que la suite (u_n) converge vers 0.
Si ce n'est pas le cas, la série diverge grossièrement.
2) Un équivalent de u_n ou de $|u_n|$,
3) Une inégalité avec u_n ou avec $|u_n|$,
4) La règle de d'Alembert avec $|u_n|$,
5) Une comparaison série-intégrale.

Exemple 9 : Nous allons étudier la convergence de la série $\sum \mathrm{e}^{1/n}$. Par composition des limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{1/n} = 1$, donc la série $\sum \mathrm{e}^{1/n}$ diverge grossièrement.

Exemple 10 : Nous allons étudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+1}$. On a

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \geqslant 0,$$

or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ converge absolument par comparaison, donc la série converge.

Exemple 11 : Nous allons étudier la convergence de la série $\sum \sin(n)\mathrm{e}^{-n}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \left|\sin(n)\mathrm{e}^{-n}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-n}$$

or $\sum \mathrm{e}^{-n}$ est une série géométrique convergente (car de raison $\left|\mathrm{e}^{-1}\right| < 1$), donc la série $\sum \sin(n)\mathrm{e}^{-n}$ converge absolument par comparaison, donc la série converge.

Exemple 12 : Nous allons étudier la convergence de la série $\sum \frac{\ln(n)}{n}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{\ln(n)}{n},$$

or $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, donc la série $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ diverge par comparaison.

Exemple 13 : Nous allons étudier la convergence de la série $\sum \frac{n^2-1}{2^n}$. Si l'on note u_n le terme général de la série, on a $u_n > 0$ pour tout $n \geqslant 2$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2-1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2-1} \sim \frac{2^n}{2^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} < 1,$$

donc $\sum \frac{n^2-1}{2^n}$ converge par la règle de d'Alembert.

Exemple 14 : Nous allons étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$. La fonction

$$f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{t\ln(t)}$$

est continue, décroissante et positive. En appliquant le théorème de comparaison série-intégrale, on en déduit que

$$\sum \frac{1}{n\ln(n)} \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad I = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \text{ converge.}$$

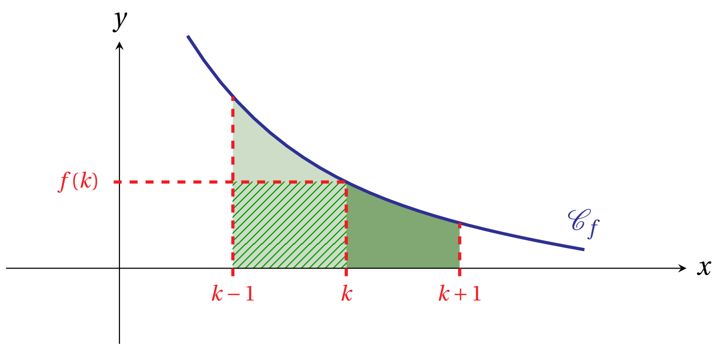
Or pour tout réel $\beta > 2$, on a

$$\int_2^\beta \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = [\ln(\ln(t))]_2^\beta = \ln(\ln(\beta)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} +\infty.$$

Ainsi l'intégrale I est divergente, donc la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ est divergente.

V.B - Encadrer une somme avec des intégrales

Méthode : Encadrer une somme (cas d'une fonction décroissante)
Si $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue, positive et décroissante, on peut étudier la suite des sommes partielles ou la suite des restes de la série $\sum f(n)$ en les encadrant avec des intégrales. On peut représenter la situation avec le graphique suivant.



Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la partie hachurée a pour aire $f(k)$, donc on en déduit l'inégalité

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En sommant ces inégalités pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on obtient en utilisant la relation de Chasles un encadrement de la suite des sommes partielles par des intégrales

$$\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si la série $\sum f(n)$ est convergente, on peut de même encadrer le reste

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 15 : On souhaite déterminer un équivalent de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

La fonction $t \mapsto 1/t$ est continue, positive et décroissante, donc on a l'encadrement

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

En sommant ces inégalités pour $2 \leqslant k \leqslant n$, on obtient avec la relation de Chasles

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

En ajoutant 1 à chaque membre de cette inégalité, on en déduit

$$1 + \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant H_n \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t},$$

puis en calculant les intégrales

$$\ln(n+1) + 1 - \ln(2) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n).$$

On en déduit en divisant par $\ln(n)$ l'inégalité

$$\frac{\ln(n+1)+1-\ln(2)}{\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

Le membre de gauche et le membre de droite de l'inégalité converge vers 1. On en déduit avec le théorème d'encadrement

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1,$$

ce qui permet de conclure que

$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$$

Exemple 16 : On souhaite déterminer un équivalent de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

La fonction $t \mapsto 1/t^3$ est continue, positive et décroissante, donc on a l'encadrement

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leqslant \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}.$$

La série $\sum \frac{1}{n^3}$ étant convergente, on peut sommer ces inégalités pour $k \geqslant n+1$, ce qui nous permet d'obtenir

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}.$$

On calcule les intégrales. Pour tout $\beta > 0$, on a

$$\int_n^{\beta} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_n^{\beta} = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2\beta^2} \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \frac{1}{2n^2}.$$

On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'inégalité

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{2n^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n^2}{(n+1)^2} \leqslant 2n^2 R_n \leqslant 1.$$

Le membre de gauche et le membre de droite de l'inégalité converge vers 1. On en déduit avec le théorème d'encadrement que

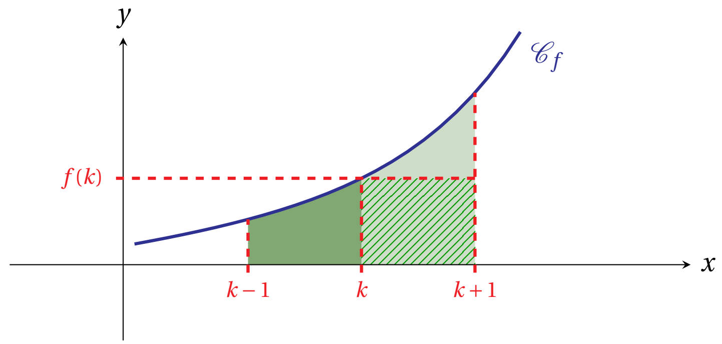
$$\lim_{n\to+\infty} 2n^2 R_n = 1,$$

ce qui permet de conclure que

$$R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

Méthode : Encadrer une somme (cas d'une fonction croissante)

Si la fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue, positive et croissante, les inégalités sont inversées. En effet, on peut représenter la situation par le graphique suivant.



Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la partie hachurée a pour aire $f(k)$, donc on en déduit l'inégalité

$$\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La reste de la méthode est identique au cas précédent.