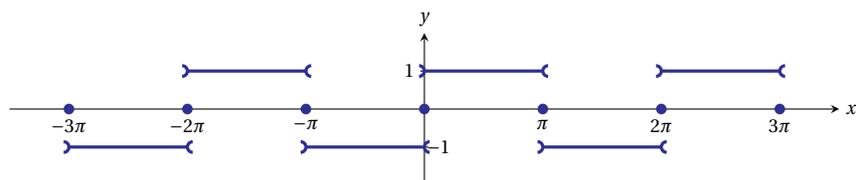


CHAPITRE 11

Séries de Fourier

Exercice 1 : On commence par tracer le graphique de la fonction f .



1. Comme f est impaire, on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}.$$

En distinguant selon la parité de l'indice $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad b_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad b_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)\pi}.$$

2. Comme la fonction f est 2π -périodique et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, on a par le théorème de Dirichlet que la série de Fourier de f converge vers la régularisée \tilde{f} de f qui, par hypothèse dans cet exercice, est f . On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)x).$$

En particulier pour $x = \pi/2$, on a

$$1 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} (-1)^p.$$

On en déduit que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)} = \frac{\pi}{4}.$$

D'autre part, si on applique le théorème de Parseval, on obtient

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{(2p+1)\pi} \right)^2 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

On en déduit que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. La série de terme générale $1/n^2$ est convergente. On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

On a en passant à la limite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

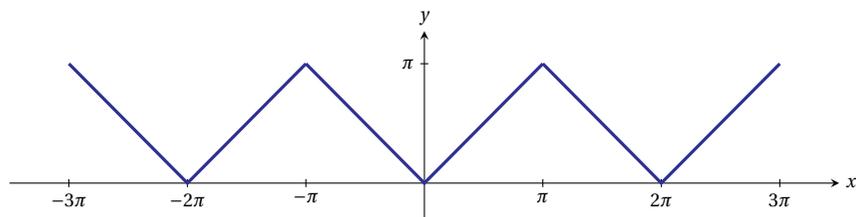
De même, la série de terme générale $(-1)^{n+1}/n^2$ est convergente et on a

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2p+2}}{(2p+1)^2} = -\frac{1}{4} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^2},$$

donc en passant à la limite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = -\frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{8} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 2 : On commence par tracer le graphique de la fonction f .



1. Comme la fonction f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'autre part, on a

$$a_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi}.$$

En distinguant selon la parité de l'indice $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$a_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p-1} = -\frac{4}{(2p-1)^2\pi}.$$

2. Comme la fonction f est 2π -périodique, continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge vers la régularisée $\tilde{f} = f$ d'après le théorème de Dirichlet. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-4}{(2p+1)^2\pi} \cos((2p+1)x).$$

En particulier pour $x = 0$, on a

$$0 = \frac{\pi}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-4}{(2p+1)^2\pi}$$

donc

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

D'autre part, si on applique le théorème de Parseval, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{3} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{-4}{(2p+1)^2\pi}\right)^2 \\ &= \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

3. La série de terme générale $1/n^2$ est convergente. On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

On a en passant à la limite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

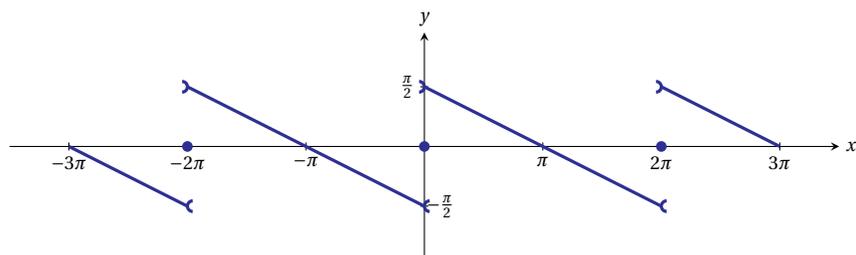
De même, la série de terme générale $1/n^4$ est convergente et on a

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^4} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{1}{16} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^4} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^4},$$

donc en passant à la limite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{\pi^4}{96} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 3 : On commence par tracer le graphique de la fonction f .



1. Comme la fonction f est impaire, on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, on a par le calcul

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

2. Comme la fonction f est continue par morceaux, le théorème de Parseval s'applique et on obtient

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

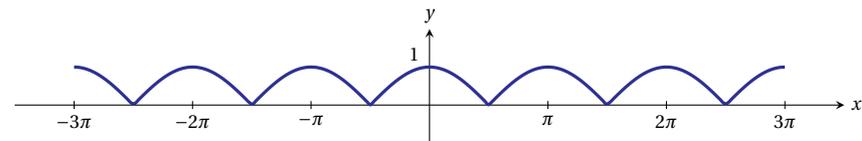
3. Comme la fonction f est 2π -périodique et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge vers la régularisée \tilde{f} de f d'après le théorème de Dirichlet. Comme $\tilde{f} = f$, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Pour $\theta \in]0, 2\pi[$, on a $f(\theta) = (\pi - \theta)/2$, donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

Exercice 4 : On commence par tracer le graphique de la fonction f .



1. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x + \pi) = |\cos(x + \pi)| = |-\cos(x)| = |\cos(x)| = f(x),$$

donc la fonction f est π -périodique.

2. Comme la fonction f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'autre part, on a par le calcul

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1} 4}{(4n^2 - 1)\pi}.$$

3. Comme la fonction f est π -périodique, continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge vers la régularisée $\tilde{f} = f$ d'après le théorème de Dirichlet. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\cos(x)| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4}{(4n^2 - 1)\pi} \cos(2nx).$$

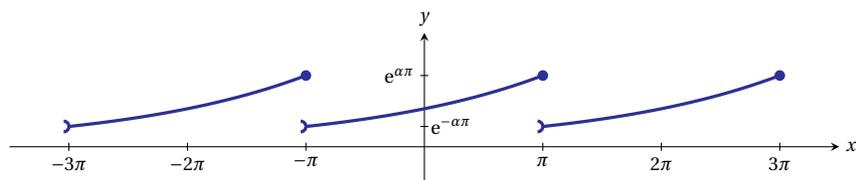
En particulier pour $x = 0$, on a

$$1 = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4}{(4n^2 - 1)\pi},$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2 - 1)} = \frac{\pi - 2}{4}.$$

Exercice 5 : On commence par tracer le graphique de la fonction f .



1. On a par le calcul pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_0 = \frac{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}{2\pi\alpha}, \quad a_n = \frac{(-1)^n \alpha (e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})}{\pi(\alpha^2 + n^2)},$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1} n (e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})}{\pi(\alpha^2 + n^2)}.$$

2. Comme la fonction f est 2π -périodique et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge vers la régularisée \tilde{f} d'après le théorème de Dirichlet. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

En particulier pour $x = 0$, on a

$$1 = \frac{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}{2\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \alpha (e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})}{\pi(\alpha^2 + n^2)},$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{2\alpha\pi}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} - 1 \right).$$

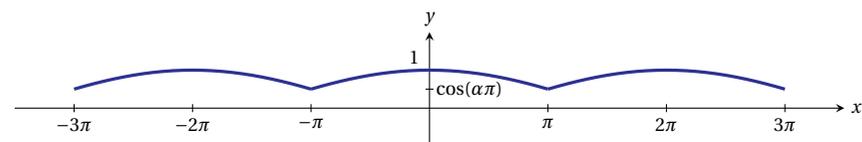
De même, pour $x = \pi$, on trouve

$$\frac{e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}}{2} = \frac{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}{2\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha (e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})}{\pi(\alpha^2 + n^2)},$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} \left(\alpha\pi \frac{e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} - 1 \right).$$

Exercice 6 : On commence par tracer le graphique de la fonction f .



1. Comme la fonction f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a par le calcul

$$a_0 = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = (-1)^{n-1} \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(n^2 - \alpha^2)}.$$

2. Comme la fonction f est 2π -périodique, continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge vers la fonction f d'après le théorème de Dirichlet. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(n^2 - \alpha^2)} \cos(nx).$$

En particulier pour $x = 0$, on a

$$1 = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(n^2 - \alpha^2)}.$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)} - 1 \right).$$

De même, pour $x = \pi$, on trouve

$$\cos(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(n^2 - \alpha^2)} (-1)^n,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1 - \alpha\pi \cotan(\alpha\pi)}{2\alpha^2}.$$

3. Pour $x = \pi$, on obtient

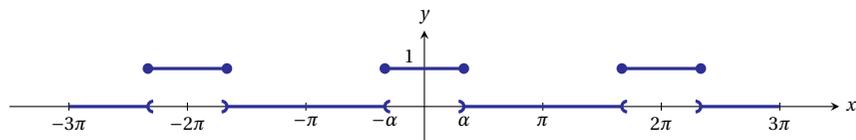
$$\cos(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

En posant $\alpha = x/\pi$ pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, on obtient

$$\cos(x) = \frac{\sin(x)}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x \sin(x)}{x^2 - (n\pi)^2},$$

ce qui donne le résultat en divisant par $\sin(x)$.

Exercice 7 : On commence par tracer le graphique de la fonction f .



1. Comme la fonction f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a par le calcul

$$a_0 = \frac{\alpha}{\pi}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{2 \sin(n\alpha)}{n\pi}.$$

2. Comme la fonction f est 2π -périodique, continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge vers la fonction f d'après le théorème de Dirichlet. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \sin(n\alpha)}{n\pi} \cos(nx).$$

En particulier pour $x = 0$, on a

$$1 = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \sin(n\alpha)}{n\pi}.$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} = \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

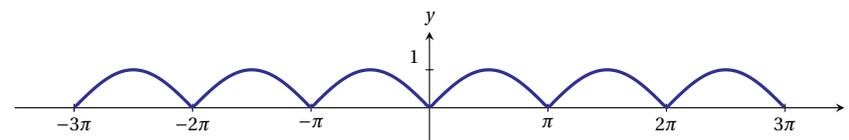
D'autre part, si on applique le théorème de Parseval, on obtient

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2 \sin(n\alpha)}{n\pi}\right)^2,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}.$$

Exercice 8 : On commence par tracer le graphique de la fonction f .



La fonction $f : x \mapsto |\sin(x)|$ est continue et π -périodique. Comme elle est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a par le calcul

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{-4}{\pi(4n^2 - 1)}.$$

Comme la fonction f est π -périodique, continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge vers la fonction f d'après le théorème de Dirichlet. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-4}{\pi(4n^2 - 1)} \cos(2nx).$$

En prenant $x = 0$, on trouve

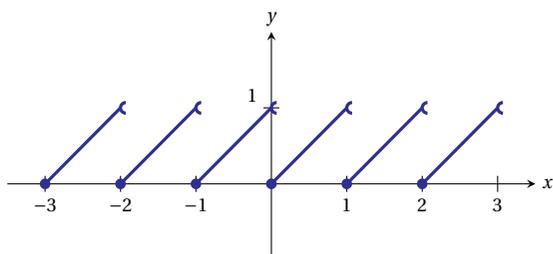
$$\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)}.$$

Ainsi, en utilisant cette relation, on obtient

$$|\sin(x)| = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)} (1 - \cos(2nx)).$$

Finalement, comme $1 - \cos(2nx) = 2 \sin^2(nx)$, on obtient le résultat.

Exercice 9 : On commence par tracer le graphique de la fonction f .



On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'égalité

$$f(x+1) = x+1 - [x+1] = x+1 - [x] - 1 = f(x),$$

donc f est 1-périodique.

On a par le calcul pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_n = 0 \quad \text{et} \quad b_n = -\frac{1}{\pi n}.$$

Comme la fonction f est 1-périodique et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge vers la fonction f d'après le théorème de Dirichlet. De plus, la fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$f(x) = \tilde{f}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n}.$$

Exercice 10 :

1. Avec une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} a_n(f') &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} [f(t) \cos(nt)]_0^{2\pi} + \frac{n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \\ &= nb_n(f). \end{aligned}$$

De même, on a $b_n(f') = -na_n(f)$.

2. On commence par remarquer que

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0.$$

Comme la fonction f est 2π -périodique et continue, on a par le théorème de Parseval

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \frac{2\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)^2 + b_n(f)^2)$$

On peut majorer, puis utiliser les égalités de la question précédente

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt &\leq \frac{2\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left((-na_n(f))^2 + (nb_n(f))^2 \right) \\ &\leq 2\pi \left(a_0(f')^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f')^2 + b_n(f')^2) \right) \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Parseval à la fonction f' qui est continue, on obtient finalement

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt \leq \int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt.$$

3. On a égalité si et seulement si $|a_n(f)| = |na_n(f)|$ et $|b_n(f)| = |nb_n(f)|$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que l'on a égalité si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq 2 \Rightarrow a_n(f) = b_n(f) = 0.$$

Comme f est de classe \mathcal{C}^1 , le théorème de Dirichlet s'applique, et la condition ci-dessus équivaut à

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a \cos(x) + b \sin(x).$$

Exercice 11 :

1. La fonction vérifie les hypothèses du théorème de Parseval, donc les séries numériques $\sum_{n \geq 1} a_n(f)^2$ et $\sum_{n \geq 1} b_n(f)^2$ convergent. En particulier, on en déduit que

les suites numériques $(a_n(f)^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(f)^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers 0, donc les suites $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers 0.

2. On démontre la propriété que l'on note \mathcal{P}_k par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Pour $k = 0$, il s'agit de la première question.
- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_k est vraie. Si f est une fonction T -périodique de classe \mathcal{C}^{k+1} , alors f' est une fonction T -périodique de classe \mathcal{C}^k . Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $a_n(f') = o(n^{-k})$ et $b_n(f') = o(n^{-k})$. De plus, avec une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \left[f(t) \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_0^T - \frac{1}{T} \int_0^T f'(t) \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} dt \\ &= -\frac{1}{n\omega} b_n(f') = -\frac{1}{n\omega} o\left(\frac{1}{n^k}\right) = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right). \end{aligned}$$

De manière analogue, on montre que $b_n(f) = o(n^{-k+1})$.

Finalement, on a montré \mathcal{P}_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.