CHAPITRE 11
Séries de Fourier

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, régularisée et impaire définie par

$$\forall x \in]0,\pi[, \quad f(x) = 1.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

3. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et paire définie par

$$\forall x \in [0,\pi], \quad f(x) = x.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

3. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et impaire définie par

$$\forall x \in]0,\pi], \quad f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

3. En déduire pour $\theta \in]0,2\pi[$ la valeur de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}.$$

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = |\cos(x)|.$$

1. Montrer que f est π-périodique.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}.$$

Exercice 5 : Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in]-\pi,\pi], \quad f(x) = \exp(\alpha x).$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\alpha^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2}.$$

Exercice 6 : Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in]-\pi, \pi], \quad f(x) = \cos(\alpha x).$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \alpha^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}.$$

3. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - (n\pi)^2}.$$

Exercice 7 : Soient $\alpha \in]0, \pi[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant \alpha \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f.
2. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha n)}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(\alpha n)}{n^2}.$$

Exercice 8 : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|\sin(x)| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2 - 1}.$$

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

1. Montrer que la fonction f est 1-périodique.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{n}.$$

Exercice 10 (Inégalité de Wirtinger) **:** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

1. Exprimer $a_n(f')$ et $b_n(f')$ en fonction de $a_n(f)$ et $b_n(f)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire l'inégalité

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} f'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

3. Déterminer les cas d'égalités.

Exercice 11 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et T-périodique.

1. Montrer que les suites $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers 0.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, alors

$$a_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{et} \quad b_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$