

CHAPITRE 11

Séries de Fourier

Plan du chapitre

I Fonctions définies par morceaux.....	2
A - Généralités.....	2
B - Intégration d'une fonction continue par morceaux.....	2
II Coefficients et série de Fourier	3
A - Coefficients de Fourier	3
B - Série de Fourier	4
III Structure préhilbertienne	4
IV Théorèmes de convergence.....	5
A - Le théorème de Parseval.....	5
B - Le théorème de Dirichlet.....	5

Introduction

Une série trigonométrique de période $T > 0$ est une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} x\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} x\right) \quad (*)$$

où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont des suites de nombres réels. La théorie des séries de Fourier permet sous certaines conditions de décomposer de manière effective une fonction T -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sous la forme (*).

Les prémices de ce type de problème remontent à une controverse éclatant aux alentours de 1750 entre d'Alembert, Euler et Daniel Bernoulli sur le problème des cordes vibrantes. Le français d'Alembert détermine l'équation d'onde ainsi que ses solutions sous formes analytiques, tandis que Bernoulli les obtient sous forme de décomposition en série trigonométrique. La discussion porte sur la nécessité de concilier ces deux points de vue.

En 1807, le mathématicien français Joseph Fourier introduit les séries de Fourier et la transformation de Fourier dans son mémoire *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides* qu'il présente à l'Académie des sciences afin de résoudre l'équation de la chaleur. Ces premiers travaux, controversés sur le plan de l'analyse, ne furent pas publiés, mais on les retrouve en grande partie dans son œuvre maîtresse *Théorie analytique de la chaleur* publiée en 1822.

D'un point de vue moderne, les travaux de Fourier manquent de rigueur, notamment à cause du flou entourant les notions de fonction et d'intégrale au début du XIX^e siècle. Par la suite, Dirichlet et Riemann ont contribué à la formalisation des idées de Fourier. Le premier a démontré en 1829 le théorème de convergence de la série de Fourier portant aujourd'hui son nom. Le second a présenté en 1854, à l'occasion de sa thèse d'habilitation à l'Université de Göttingen, un travail intitulé *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique* qui constitue une avancée décisive : l'auteur lève un obstacle majeur en définissant pour la première fois une théorie de l'intégration satisfaisante.

Du point de vue de la physique, on sait que tout signal se décompose comme une superposition de signaux sinusoïdaux. La théorie des séries de Fourier permet de déterminer cette décomposition dans le cas d'un signal périodique.

Dans ce chapitre, nous commencerons par étendre succinctement la théorie de l'intégration aux fonctions continues par morceaux. Dans un second temps, nous définirons les coefficients de Fourier et la série de Fourier d'une fonction continue par morceaux, puis nous établirons leurs principales propriétés. Finalement, nous étudierons deux théorèmes de convergence sur la série de Fourier.

Dans tout le chapitre, on fixe un réel $T > 0$ et on note $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

I - Fonctions définies par morceaux

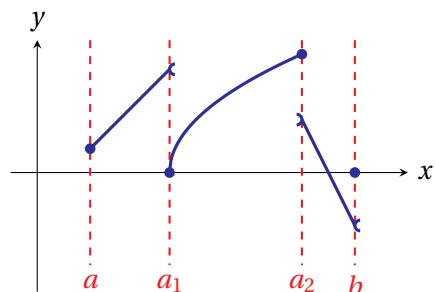
I.A - Généralités

Définition (Régularité par morceaux d'une fonction définie sur un segment) : Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision

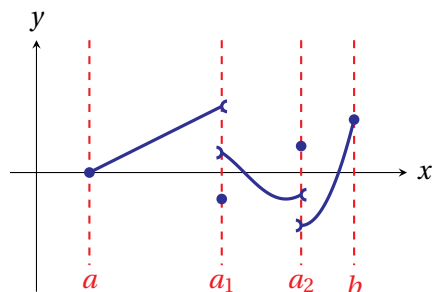
$$a = a_0 < \dots < a_n = b$$

telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable comme fonction continue (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Exemple 1 : La fonction du premier graphe ci-dessous est continue par morceaux, mais elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, car sa restriction à l'intervalle $[a_1, a_2]$ admet une tangente verticale en $x = a_1$.



Une fonction $\mathcal{C}^0$ par morceaux



Une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Remarque 1 : L'ensemble des fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

Définition (Régularité par morceaux d'une fonction périodique) : Une fonction périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) si elle est continue par morceaux (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sur une période.

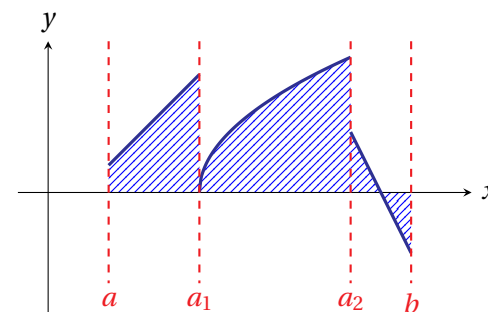
Remarque 2 : L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux et périodique de période T est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

I.B - Intégration d'une fonction continue par morceaux

Définition (Intégrale d'une fonction continue par morceaux) : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. En reprenant les notations de la définition d'une fonction continue par morceaux, l'intégrale de f sur $[a, b]$ est définie par

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t) dt.$$

Illustration : L'intégrale de la première fonction de l'exemple 1 est l'aire algébrique de la partie colorée ci-dessous.



Remarque 3 : La définition de l'intégrale ne dépend pas de la subdivision que l'on utilise pour calculer les intégrales.

Proposition (Relation de Chasles) : Si $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux et si $a < b < c$, alors

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

Proposition 1 : Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(i) L'intégration est linéaire, i.e.

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

(ii) Si f est positive sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

(iii) Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

ATTENTION : Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux, positive et d'intégrale nulle, on ne peut pas en déduire que f est la fonction nulle en général. Par exemple, si on considère la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

alors la fonction f n'est pas nulle, mais elle est positive et

$$\int_0^1 f(t) dt = 0.$$

II - Coefficients et série de Fourier

II.A - Coefficients de Fourier

Définition (Coefficients de Fourier trigonométriques) : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et T -périodique. Les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les réels

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \\ a_n(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt, & b_n(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt. \end{aligned}$$

Remarques 4 :

- a) Quand il n'y a pas de confusion possible, on note simplement a_n et b_n .
- b) Comme les fonctions sont T -périodiques, on peut calculer les intégrales sur n'importe quel intervalle de longueur T .
- c) Le coefficient a_0 est la valeur moyenne de f sur une période.

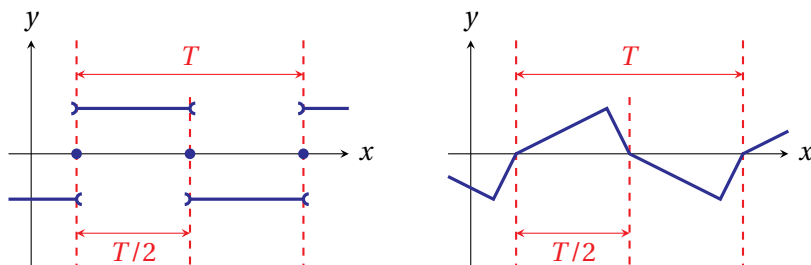
Exemple 2 : Les coefficients de Fourier de la fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t$ pour $t \in [-\pi, \pi[$ sont

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Proposition 2 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique et continue par morceaux.

- (i) Si f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n = 0$.
- (ii) Si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = 0$.
- (iii) Si f vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$ la relation $f\left(x + \frac{T}{2}\right) = -f(x)$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_0 = a_{2n} = b_{2n} = 0$.

Exemple 3 : Une fonction vérifiant l'hypothèse du point (iii) est appelée une symétrie de glissement. Voici les graphes de deux telles fonctions.



II.B - Série de Fourier

Définition (Somme partielle de Fourier) : Soit $n \in \mathbb{N}$. La somme partielle de Fourier à l'ordre n d'une fonction T -périodique et continue par morceaux $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est

$$S_n(f)(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t).$$

Exemple 4 : En reprenant la fonction de l'exemple 2, on a

$$S_3(f)(t) = 2 \sin(t) - \sin(2t) + \frac{2}{3} \sin(3t).$$

Définition (Série de Fourier) : La série de Fourier d'une fonction T -périodique et continue par morceaux $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la série

$$S(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t).$$

ATTENTION : La série de Fourier n'est pas nécessairement convergente!

Exemple 5 : La série de Fourier de la fonction de l'exemple 2 est

$$S(f)(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nt).$$

III - Structure préhilbertienne

On note $E = \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui sont T -périodiques.

Proposition 3 : L'application $(\cdot | \cdot) : \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2, \quad (f | g) \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Corollaire 1 : Le couple $(\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}), (\cdot | \cdot))$ est un espace préhilbertien.

Remarque 5 : Si on considère plus généralement les fonctions continues par morceaux, alors l'application $(\cdot | \cdot)$ n'est pas un produit scalaire : elle ne serait pas définie positive, mais seulement positive.

Proposition 4 : La famille $\{t \mapsto 1, t \mapsto \sqrt{2} \cos(k\omega t), t \mapsto \sqrt{2} \sin(k\omega t) \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ de l'espace préhilbertien $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est orthonormée.

Corollaire 2 : Si $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors la fonction $S_n(f)$ est la projection orthogonale de la fonction f sur le sous-espace vectoriel

$$\mathcal{P}_{n,T} = \text{Vect} \{t \mapsto 1, t \mapsto \cos(k\omega t), t \mapsto \sin(k\omega t) \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}.$$

Corollaire 3 : Si $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a l'égalité

$$\|S_n(f)\|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

IV - Théorèmes de convergence

IV.A - Le théorème de Parseval

Théorème de Parseval : Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction T -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent et

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Exemple 6 : En appliquant le théorème de Parseval à la fonction de l'exemple 2, on obtient

$$\frac{\pi^2}{3} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

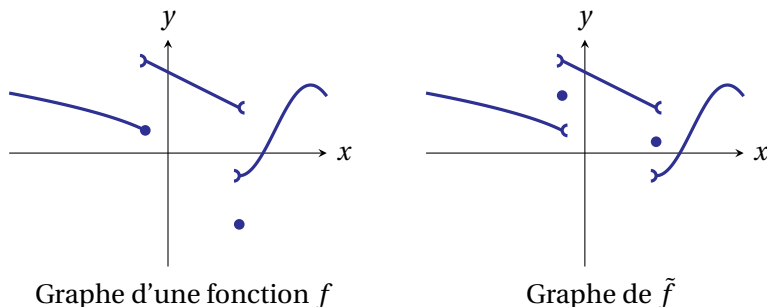
IV.B - Le théorème de Dirichlet

Définition (Régularisée d'une fonction) : La régularisée d'une fonction continue par morceaux $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(t+h) + f(t-h)}{2} \right).$$

Remarque 6 : Si f est continue, on a $f = \tilde{f}$.

Illustration : Voici un exemple de fonction f et de sa régularisée $\tilde{f}$.



Théorème de Dirichlet : Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction T -périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge en tout point de $\mathbb{R}$ vers la fonction $\tilde{f}$. Autrement dit, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t).$$

Remarque 7 : L'hypothèse de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux est primordial : il existe des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et T -périodiques dont la série de Fourier diverge.

Exemple 7 : En appliquant le théorème à la fonction de l'exemple 2, on obtient

$$\tilde{f}(t) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt).$$

Illustration : Avec la fonction f de l'exemple 2, on obtient les graphiques suivants.

