CHAPITRE 11
Séries de Fourier

Introduction

On souhaite décomposer une fonction 2π-périodique quelconque à l'aide des fonctions 2π-périodiques élémentaires

$$t \mapsto 1, t \mapsto \cos(t), t \mapsto \cos(2t), t \mapsto \cos(3t), \dots$$
$$t \mapsto \sin(t), t \mapsto \sin(2t), t \mapsto \sin(3t), \dots$$

Du point de vue de la physique, cela revient à décomposer un signal périodique en une superposition de signaux sinusoïdaux. Pour étudier ce problème, nous allons utiliser les résultats vus sur les espaces préhilbertiens.

I - L'espace vectoriel $\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

On note $E = \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui sont 2π-périodiques.

I.1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On définit l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \varphi(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

I.2) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

II - L'espace des polynômes trigonométriques

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit les fonctions $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u_k(t) = \cos(kt) \quad \text{et} \quad v_k(t) = \sin(kt).$$

Dans la suite, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et on définit l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré au plus n par

$$\mathscr{P}_n = \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n).$$

II.1) Montrer $(u_0, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ est une famille orthogonale.

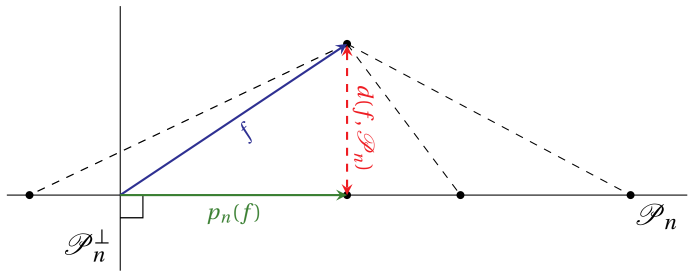
II.2) En déduire une base orthonormée de $\mathscr{P}_n$.

II.3) Quelle est la dimension de $\mathscr{P}_n$?

III - Projection orthogonale sur $\mathscr{P}_n$

On considère une fonction $f \in E$ qu'on souhaite approcher du mieux possible par un polynôme trigonométrique. En utilisant le produit scalaire défini précédemment, on cherche donc un polynôme trigonométrique $f_n \in \mathscr{P}_n$ minimisant la longueur $\|f - f_n\|$. D'après le chapitre précédent, la solution à ce problème est la projection orthogonale $p_n(f)$ de la fonction f sur le sous-espace vectoriel $\mathscr{P}_n$.

Illustration : On peut représenter la situation sur le schéma ci-dessous.



Nous allons chercher une expression de $p_n(f)$ en fonction de f.

III.1) Justifier qu'il existe $(a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ tel que

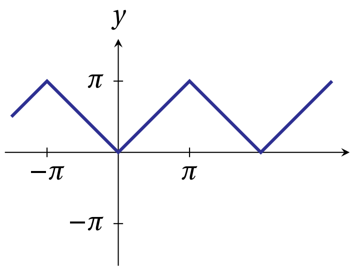
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p_n(f)(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt).$$

III.2) Exprimer les nombres $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ en fonction de f.

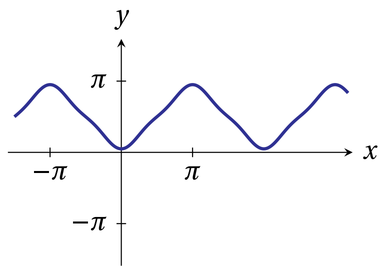
Exemple : On considère la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in]-\pi, \pi], \quad f(x) = |x|.$$

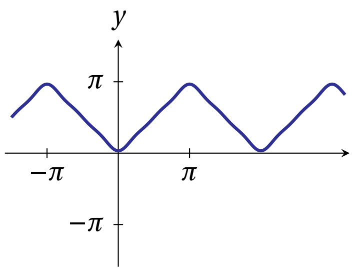
Voici les graphes de f et de $p_n(f)$ pour différentes valeurs de n.



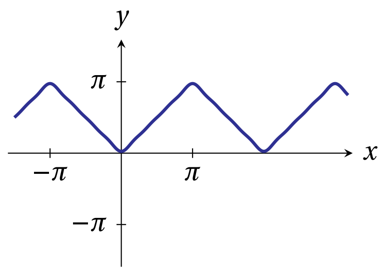
Graphe de f



Graphe de $p_3(f)$



Graphe de $p_5(f)$



Graphe de $p_7(f)$

IV - Problématiques

Nous avons donc trouver une méthode pour approcher une fonction continue et 2π-périodique par un polynôme trigonométrique de degré au plus n. Pour poursuivre l'étude de notre problème, on peut se poser les questions suivantes.

Q1) Que se passe-t-il lorsque $n \to +\infty$? Plus précisément, la série

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

converge-t-elle ? Si oui, sa somme est-elle $f(t)$?

Q2) En physique, les signaux ne sont pas toujours modéliser par une fonction continue (par exemple un signal rectangulaire). Le procédé exposé ci-dessus s'applique-t-il à des fonctions qui ne sont pas continues ?

Q3) Peut-on adapter le procédé précédent à des fonctions T-périodiques pour un réel $T > 0$?