CHAPITRE 8
Séries entières

Exercice 1 : On note R le rayon de convergence de la série entière S étudiée.

(i) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\frac{3^n}{n^2}|z| = \frac{(n+1)^2}{3n^2}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{|z|}{3} = \ell.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :
- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 3$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 3$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 3$.

(ii) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)^2}}{\mathrm{e}^{-n^2}} = \mathrm{e}^{-2n-1}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = \ell.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $\ell < 1$, donc la série S converge absolument. On conclut que $R = +\infty$.

(iii) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}\frac{n^2}{\ln(n)}|z|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|^2 = \ell.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :
- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 1$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 1$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 1$.

(iv) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n}|z|^3 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n |z|^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}|z|^3 = \ell.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :
- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < \mathrm{e}^{-1/3}$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > \mathrm{e}^{-1/3}$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = \mathrm{e}^{-1/3}$.

(v) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)!}{n!}|z| = (n+1)|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty = \ell.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $\ell > 1$, donc la série S diverge grossièrement. On conclut que $R = 0$.

(vi) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \binom{2n+2}{n+1}\binom{2n}{n}^{-1}|z|^4 = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|z|^4 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4|z|^4 = \ell.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :
- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 2^{-1/2}$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 2^{-1/2}$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 2^{-1/2}$.

(vii) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|2+\mathrm{i}(n+1)|}{|2+\mathrm{i}n|}|z| = \frac{\sqrt{4+(n+1)^2}}{\sqrt{4+n^2}}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z| = \ell.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :
- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 1$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 1$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 1$.

$(viii)$ Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|n+1+\mathrm{i}|}{|2+\mathrm{i}(n+1)|}\frac{|2+\mathrm{i}n|}{|n+\mathrm{i}|}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z| = \ell.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :
- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 1$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 1$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 1$.

(ix) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|1+\mathrm{i}|^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\frac{n2^n}{|1+\mathrm{i}|^n}|z|^3 = \frac{\sqrt{2}n}{(n+1)2}|z|^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{|z|^3}{\sqrt{2}} = \ell.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :
- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 2^{1/6}$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 2^{1/6}$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 2^{1/6}$.

(x) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3}\frac{(n!)^3}{(3n)!}|z|^3 = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3}|z|^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 27|z|^3 = \ell.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :
- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 1/3$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 1/3$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 1/3$.

(xi) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|^{(n+1)^2}}{|z|^{n^2}} = |z|^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |z|<1 \\ 1 & \text{si} \quad |z|=1 \\ +\infty & \text{si} \quad |z|>1 \end{cases}.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :
- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 1$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 1$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 1$.

(xii) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|^{(n+1)!}}{|z|^{n!}} = |z|^{n\cdot n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |z|<1 \\ 1 & \text{si} \quad |z|=1 \\ +\infty & \text{si} \quad |z|>1 \end{cases}.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :
- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 1$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 1$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 1$.

Exercice 2 :

1. On essaye d'appliquer la règle de d'Alembert. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$a_n = \frac{\left|(n+1)^{(-1)^{n+1}}x^{n+1}\right|}{\left|n^{(-1)^n}x^n\right|} = \frac{(n+1)^{(-1)^{n+1}}}{n^{(-1)^n}}|x|.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on obtient

$$a_{2p} = \frac{|x|}{2p(2p+1)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = (2p+2)(2p+1)|x| \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty,$$

donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas et la règle de d'Alembert ne s'applique pas.

2. Il suffit de distinguer selon la parité de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour vérifier que l'inégalité est vraie.

3. Notons R le rayon de convergence de la série entière que l'on étudie. Par la question précédente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \frac{|x|^n}{n} \leqslant n^{(-1)^n}|x|^n \leqslant n|x|^n.$$

De plus, on remarque avec la règle de d'Alembert par exemple que les séries entières $\sum x^n/n$ et $\sum nx^n$ ont pour rayon de convergence 1.
- Si $|x| > 1$, alors la série $\sum |x|^n/n$ diverge, donc $\sum n^{(-1)^n}|x|^n$ diverge par comparaison. Ainsi $R \leqslant 1$.

- Si $|x| < 1$, alors la série $\sum n|x|^n$ converge, donc $\sum n^{(-1)^n}|x|^n$ converge par comparaison. Ainsi $R \geqslant 1$.

On conclut que $R = 1$.

Exercice 3 : Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

De plus, l'égalité précédente reste valable pour $x = 0$. Comme f s'écrit sous la forme d'une série entière, on en déduit d'après le cours que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} - 1\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}.$$

On prolonge f à $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = 1$. L'égalité précédente reste valable pour $x = 0$. Comme f s'écrit sous la forme d'une série entière, on en déduit d'après le cours que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 :

(i) Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$a^x = e^{x\ln(a)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\ln^n(a)\frac{x^n}{n!}.$$

L'expression précédente étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{a+x} = e^a \cdot e^x = e^a \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^a \frac{x^n}{n!}.$$

L'expression précédente étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$.

(iii) Pour tout $x \in]-a, a[$, on a

$$\ln(a+x) = \ln(a) + \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right) = \ln(a) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{na^n}x^n.$$

On vérifie avec la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de cette série entière est a.

(iv) Pour tout $x \in]-a, a[$, on a

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-(x/a)} = \frac{1}{a}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{a^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}}.$$

On vérifie avec la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de cette série entière est a.

Exercice 6 : On note f la fonction que l'on souhaite développer en série entière.

(i) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = e^x\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{(1+i)x})$, donc

$$f(x) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n/2}}{n!}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)x^n.$$

L'égalité étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence est $+\infty$.

(ii) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

L'égalité étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence est $+\infty$.

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en linéarisant $\sin^3$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = \sin^3(x) &= \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x) \\ &= \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{4} - \frac{3^{2n+1}}{4}\right)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

L'égalité étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence est $+\infty$.

(iv) Pour $x \in]-1,1[$, on peut écrire

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln(x^2-3x+2) = \ln((2-x)(1-x)) = \ln(2-x)+\ln(1-x)\\ &= \ln(2)+\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)+\ln(1-x)\\ &= \ln(2)-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\\ &= \ln(2)-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+1\right)\frac{x^n}{n}.\end{aligned}$$

On vérifie avec la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de cette série entière est 1.

(v) Pour $x \in]-1,1[$, on a

$$f(x) = (1+x)\cdot\frac{1}{1-x} = (1+x)\sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}x^{n+1}.$$

En effectuant un changement d'indice $k = n+1$ dans la seconde somme et en sortant le premier terme dans la première somme, on obtient

$$f(x) = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}2x^n.$$

On vérifie avec la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de cette série entière est 1.

(vi) On remarque que pour $x \in]-2,2[$, on a

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(x/2)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+(x/3)}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^n}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n.\end{aligned}$$

On vérifie avec la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de cette série entière est 2.

(vii) Pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}}{1+x}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-1/2}\\ &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{-2n+1}{2}\right)\right)(-x^2)^n\\ &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}.\end{aligned}$$

Or, on a

$$1\cdot 3\cdots(2n-1) = \frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdots(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!},$$

donc en substituant dans l'expression précédente, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}x^{2n}.$$

Finalement, on a

$$f(x) = (1+x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}(x^{2n}+x^{2n+1}).$$

On vérifie avec la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de cette série entière est 1.

$(viii)$ Pour $x \in]-1,1[$, on peut écrire

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln(x^2+x+1) = \ln\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right) = \ln(1-x^3)-\ln(1-x)\\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}x^n.\end{aligned}$$

où la suite (a_n) est définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ n'est pas un multiple de 3} \\ -2 & \text{si } n \text{ est un multiple de 3} \end{cases}$$

On vérifie avec la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de cette série entière est 1.

Exercice 7 :

1. Remarquons que $\mathrm{j}^3 = 1$. On distingue trois cas.
   - Si $n = 3p$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors
   $$1 + \mathrm{j}^n + \mathrm{j}^{2n} = 1 + \mathrm{j}^{3p} + \mathrm{j}^{6p} = 1 + 1 + 1 = 3.$$
   - Si $n = 3p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors
   $$1 + \mathrm{j}^n + \mathrm{j}^{2n} = 1 + \mathrm{j}^{3p+1} + \mathrm{j}^{6p+2} = 1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = \frac{1 - \mathrm{j}^3}{1 - \mathrm{j}} = 0.$$
   - Si $n = 3p + 2$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors
   $$1 + \mathrm{j}^n + \mathrm{j}^{2n} = 1 + j^{3p+2} + \mathrm{j}^{3p+4} = 1 + \mathrm{j}^2 + \mathrm{j} = \frac{1 - \mathrm{j}^3}{1 - \mathrm{j}} = 0.$$

   Finalement, on a montré que
   $$1 + \mathrm{j}^n + \mathrm{j}^{2n} = \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ est un multiple de 3} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. D'après le cours et la question précédente, on a
   $$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}^2 x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \mathrm{j}^n + \mathrm{j}^{2n}) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3x^{3n}}{(3n)!}$$
   qui est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En prenant $x = 1$ dans la relation précédente, on en déduit que
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}^2}}{3} = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e} + 2\mathrm{e}^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

Exercice 8 : La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$ se développe en série entière

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n!}.$$

Comme $[0,1]$ est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-\infty, +\infty[$ de la série entière, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}.$$

Exercice 9 :

1. Il suffit de remarquer que la fonction Arctan et une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ et que $\mathrm{Arctan}(0) = 0$.
2. La fonction $f : t \mapsto 1/(1+t^2)$ se développe en série entière
   $$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}.$$
   Soit $x \in]-1,1[$. Comme le segment $[0,x]$ est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$ de la série entière, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme
   $$\begin{aligned} \mathrm{Arctan}(x) &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}. \end{aligned}$$
3. D'après le cours, le coefficient d'indice n dans le développement en série entière de Arctan est $\mathrm{Arctan}^{(n)}(0)/n!$. On en déduit que
   $$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Arctan}^{(2p)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Arctan}^{(2p+1)}(0) = (-1)^p (2p)!.$$

Exercice 10 :

1. Soit $x \in]-1,1[$. D'après le cours, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= (1-x)^{-1/2} \\ &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{-2n+1}{2}\right)\right)(-x)^n \\ &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^n.\end{aligned}$$

Or, on a

$$1\cdot 3\cdots(2n-1) = \frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdots(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!},$$

donc en substituant dans l'expression précédente, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}x^n.$$

D'après le cours, le rayon de convergence de cette série entière est 1.

2. La fonction $f : t \mapsto 1/\sqrt{1-t^2}$ se développe en série entière

$$\forall t \in]-1,1[,\quad \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}t^{2n}.$$

Soit $x \in]-1,1[$. Comme le segment $[0,x]$ est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$ de la série entière, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcsin}(x) &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}.\end{aligned}$$

Comme une série entière et sa dérivée ont le même rayon de convergence, le rayon de convergence de la série entière ci-dessus est 1.

3. On peut remplacer x par $1/2 \in]-1,1[$ dans l'expression précédente. On obtient

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)}.$$

On obtient le résultat en multipliant l'égalité précédente par 6.

Exercice 11 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1 \leqslant H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

2. On déduit de la question précédente l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad 0 \leqslant |x|^n \leqslant H_n|x|^n \leqslant n|x|^n.$$

Les séries entières $\sum x^n$ et $\sum nx^n$ ont pour rayon de convergence 1.
   - Si $|x| > 1$, alors la série $\sum |x|^n$ diverge, donc $\sum H_n|x|^n$ diverge par comparaison. Ainsi $R \leqslant 1$.
   - Si $|x| < 1$, alors la série $\sum n|x|^n$ converge, donc $\sum H_n|x|^n$ converge par comparaison. Ainsi $R \geqslant 1$.

   On conclut que $R = 1$.

3. Pour $x \in]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned}(1-x)S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}H_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}H_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}H_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}H_{n-1}x^n \\ &= x+\sum_{n=2}^{+\infty}(H_n-H_{n-1})x^n = x+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).\end{aligned}$$

4. Pour tout $x \in]-1,1[$, on en déduit que

$$\forall x \in]-1,1[,\quad S(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Exercice 12 :

1. On a l'inégalité
$$0 \leqslant \left|\frac{\sin(n\theta)x^n}{n!}\right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}.$$
Or $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ est la série entière de la fonction exponentielle, donc elle converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que la série $\sum \frac{|\sin(n\theta)|}{n!}|x|^n$ converge par comparaison pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc le rayon de convergence de S est $+\infty$.
2. En utilisant la formule de d'Euler, on a
$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}x^n}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\exp(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) + \exp(x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\exp(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right) \\ &= \exp\left(x\cos(\theta)\right)\sin\left(x\sin(\theta)\right). \end{aligned}$$

Exercice 13 : On note $f(x)$ la série entière étudiée et R son rayon de convergence.

(i) Avec la règle de d'Alembert, on a $R = +\infty$, donc on calcule f sur $\mathbb{R}$. On a
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = x\exp'(x) - \exp(x) = (x-1)\exp(x).$$

(ii) Avec la règle de d'Alembert, on a $R = 1$, donc on calcule f sur $]-1,1[$. Pour $x \in]-1,1[$ non nul, on a
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$
On conclut que
$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

(iii) Avec la règle de d'Alembert, on a $R = +\infty$, donc on calcule f sur $\mathbb{R}$. On a
$$f(x) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2/2)^n}{n!} = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

(iv) Avec la règle de d'Alembert, on a $R = 1$, donc on calcule f sur $]-1,1[$. La dérivée de la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ est
$$g'(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right).$$
Comme $g(0) = 0$, on en déduit que
$$g(x) = \frac{-\ln(1-x) + \ln(1+x)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$
puis avec $g(x) = xf(x)$, on conclut que
$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

(v) Avec la règle de d'Alembert, on a $R = 1$, donc on calcule f sur $]-1,1[$. En dérivant sur $]-1,1[$ la relation
$$\frac{1}{1+X} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n X^n,$$
on obtient que
$$\frac{1}{(1+X)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} nX^{n-1}.$$
On en déduit en posant $X = x^2$ et en multipliant par x^3 que
$$f(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}.$$

(vi) Avec la règle de d'Alembert, on a $R = 1$, donc on calcule f sur $]-1,1[$. En écrivant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right),$$

on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{x^2-1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}. \end{aligned}$$

En reprenant le résultat de (iv), on conclut que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2-1}{4x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

(vii) Avec la règle de d'Alembert, on a $R = 1$, donc on calcule f sur $]-1,1[$. En notant

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0} x^n,$$

on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = x^2 S''(x) + xS'(x).$$

On conclut que

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

$(viii)$ Avec la règle de d'Alembert, on a $R = 1$, donc on calcule f sur $]-1,1[$. En notant

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0} x^n,$$

on a pour x non nul

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = -1 + x^2 S'(x) - \frac{2\ln(1-x)}{x}.$$

On conclut que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \begin{cases} -1 + \dfrac{x^2}{(1-x)^2} - \dfrac{2\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

(ix) Avec la règle de d'Alembert, on a $R = +\infty$, donc on calcule f sur $\mathbb{R}$. En écrivant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n,$$

on obtient

$$f(x) = x^3 \exp'''(x) + 3x^2 \exp''(x) + x\exp'(x) = (x^3 + 3x^2 + x)\exp(x).$$