

## CHAPITRE 8 Séries entières

### I - Rayon de convergence

**Exercice 1 :** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 (i) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^n} z^n, & (ii) \sum_{n \geq 0} e^{-n^2} z^n, & (iii) \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}, \\
 (iv) \sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}, & (v) \sum_{n \geq 0} (-1)^n n! z^n, & (vi) \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} z^{4n}, \\
 (vii) \sum_{n \geq 0} (2+in)z^n, & (viii) \sum_{n \geq 0} \frac{n+i}{2+in} z^{2n}, & (ix) \sum_{n \geq 1} \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n2^n}, \\
 (x) \sum_{n \geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^{3n}, & (xi) \sum_{n \geq 0} z^{n^2}, & (xii) \sum_{n \geq 0} z^{n!}.
 \end{array}$$

**Exercice 2 :** On souhaite déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$S = \sum_{n \geq 1} n^{(-1)^n} x^n.$$

1. La règle de d'Alembert permet-elle d'obtenir le rayon de convergence de S?
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\frac{1}{n} \leq n^{(-1)^n} \leq n.$$

3. En déduire le rayon de convergence de la série entière S.

### II - Propriétés de la somme d'une série entière

**Exercice 3 :** On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 4 :** Montrer que la fonction  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$  se prolonge à  $\mathbb{R}$  en une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

### III - Développement en série entière

**Exercice 5 :** Soit  $a > 0$ . Calculer le développement en série entière des fonctions suivantes et préciser leur rayon de convergence.

$$(i) a^x, \quad (ii) e^{a+x}, \quad (iii) \ln(a+x), \quad (iv) \frac{1}{a-x}.$$

**Exercice 6 :** Calculer le développement en série entière des fonctions suivantes et préciser leur rayon de convergence.

$$\begin{array}{llll}
 (i) e^x \cos(x), & (ii) \sin(x) \cos(x), & (iii) \sin^3(x), & (iv) \ln(x^2 - 3x + 2), \\
 (v) \frac{1+x}{1-x}, & (vi) \frac{1}{x^2 + 5x + 6}, & (vii) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, & (viii) \ln(x^2 + x + 1).
 \end{array}$$

**Exercice 7 :** On note  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

1. Calculer  $1 + j^n + j^{2n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Calculer le développement en série entière de  $x \mapsto e^x + e^{jx} + e^{j^2x}$ .
3. En déduire la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$ .

**Exercice 8 :** Démontrer que  $\int_0^1 e^{t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}$ .

**Exercice 9 :** Nous allons développer la fonction Arctan en série entière.

1. Justifier que l'on a l'égalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

2. En déduire que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

3. Déterminer  $\text{Arctan}^{(n)}(0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 10 :** On souhaite calculer le développement en série entière de Arcsin.

1. Démontrer que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^n.$$

2. En déduire le développement en série entière de Arcsin et préciser son rayon de convergence.
3. Démontrer que l'on a

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{16^n(2n+1)} \binom{2n}{n}.$$

**Exercice 11 :** On souhaite étudier la série entière

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n \quad \text{avec} \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Démontrer que  $1 \leq H_n \leq n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. En déduire le rayon de convergence  $R$  de  $S$ .
3. Calculer  $(1-x)S(x)$  pour  $x \in ]-R, R[$ .
4. En déduire une expression de  $S(x)$  sur  $] -R, R[$ .

**Exercice 12 :** Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , on note

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n.$$

1. Avec une majoration, montrer que le rayon de convergence de  $S$  est  $+\infty$ .
2. Déterminer une expression de  $S(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 13 :** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes, puis exprimer leur somme avec des fonctions usuelles.

$$\begin{array}{lll} (i) \sum_{n \geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n, & (ii) \sum_{n \geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n, & (iii) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}, \\ (iv) \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}, & (v) \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}, & (vi) \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2 - 1}, \\ (vii) \sum_{n \geq 0} n^2 x^n, & (viii) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 1}{n+1} x^n, & (ix) \sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n. \end{array}$$