CHAPITRE 8
Séries entières

Plan du chapitre

I Convergence d'une série entière 2
- A - Rayon de convergence 2
- B - Disque et intervalle de convergence 2

II Somme d'une série entière d'une variable réelle 3

III Fonctions développables en série entière 3
- A - Généralités 3
- B - Développement en série entière des fonctions usuelles 4

IV Exponentielle complexe 4

Introduction

Une série entière est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{C}$ de la forme

$$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{avec} \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

Il est naturel de se demander si l'ensemble de convergence de la série ci-dessus et si la fonction f admettent des propriétés remarquables.

La première apparition d'une série entière remonte au XIVe siècle dans les travaux de l'indien Madhava de Sangamagrama. Ce dernier réussit à calculer les onze premières décimales du nombre π en établissant la relation

$$\forall x \in [-1,1], \quad \operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Le mathématicien découvre également des formules analogues pour les fonctions trigonométriques cosinus, sinus et tangente.

Au XVIIe siècle, ces résultats sont redécouverts en Europe par le mathématicien écossais James Gregory. En 1715, Brook Taylor établit un lien fructueux avec le calcul différentiel en donnant la construction générale des séries entières portant son nom. Ces découvertes ont initié le développement d'une méthode de résolution pour les équations différentielles linéaires (que nous verrons dans un chapitre ultérieur) en recherchant les solutions sous la forme d'une série entière.

Au XVIIIe siècle, Leonhard Euler démontre la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Dans ce chapitre, nous commencerons par étudier les résultats généraux portant sur la convergence des séries entières. Dans un second temps, nous établirons les propriétés remarquables d'une fonction réelle définie par la somme d'une série entière. Finalement, nous verrons que la plupart des fonctions usuelles s'écrivent sous la forme d'une somme de série entière.

Dans tout le chapitre, on considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

I - Convergence d'une série entière

I.A - Rayon de convergence

Définition (Série entière) : Une série entière est une série de la forme $\sum a_n z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et z désigne une variable complexe.

Lemme d'Abel : Si la suite $(a_n r^n)$ est bornée pour un réel $r > 0$, alors pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition (Rayon de convergence) : On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ l'élément $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}.$$

Proposition 1 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 0$.

(i) Si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.

(ii) Si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

ATTENTION : Il n'y a pas de règle générale pour la convergence de série $\sum a_n z^n$ pour les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = R$. Il faut étudier au cas par cas.

Remarque 1 : Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$, il suffit d'étudier pour quelle complexe $z \in \mathbb{C}$ la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Exemple 1 : On cherche le rayon de convergence R de la série entière $\sum n2^n z^n$. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, en notant $u_n = n2^n z^n$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)2^{n+1}|z|^{n+1}}{n2^n|z|^n} = \frac{2(n+1)}{n}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2|z|.$$

Par la règle de d'Alembert, on en déduit que la série $\sum n2^n z^n$ converge absolument si $2|z| < 1$ et diverge grossièrement si $2|z| > 1$. On en déduit que $R = 1/2$.

Proposition 2 : Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

I.B - Disque et intervalle de convergence

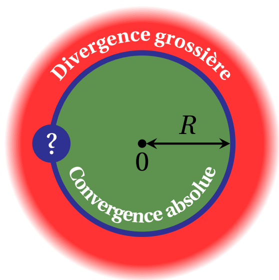
Définition (Disque ouvert et intervalle ouvert de convergence) : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 0$.

(i) Le disque ouvert de centre $0 \in \mathbb{C}$ et de rayon R est appelée le disque ouvert de convergence.

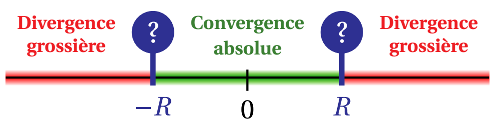
(ii) L'intervalle $]-R, R[$ est appelée intervalle ouvert de convergence.

Remarque 2 : Dans le cas où $R = +\infty$ le disque ouvert de convergence est $\mathbb{C}$ et l'intervalle ouvert de convergence est $\mathbb{R}$.

Illustration : On peut résumer la situation avec les deux schémas ci-dessous.



Disque ouvert de convergence



Intervalle ouvert de convergence

II - Somme d'une série entière d'une variable réelle

Dans cette partie, on fixe une suite **réelle** $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition (Fonction somme) : Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 0$, alors sa fonction somme est la fonction $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Théorème de dérivation terme à terme : Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors sa fonction somme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. De plus, on a

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Remarque 3 : D'après la proposition 2, une série entière et sa série entière dérivée ont le même rayon de convergence.

Théorème d'intégration terme à terme : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si $[a, b]$ est un segment inclus dans $]-R, R[$, alors on a

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b t^n \,\mathrm{d}t.$$

Exemple 2 : La série entière $\sum x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. Comme le segment $[0, 1/2]$ est inclus dans $]-1, 1[$, on a avec le théorème ci-dessus que

$$\begin{aligned} \ln(2) = \big[-\ln(1-t)\big]_0^{1/2} = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{1-t} &= \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{1/2} t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}. \end{aligned}$$

III - Fonctions développables en série entière

III.A - Généralités

Définition (Fonction développable en série entière) : Soit I un intervalle ouvert contenant 0. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est développable en série entière s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ convergente sur I telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Proposition 3 : Avec les notations de la définition précédente : si $f : I \to \mathbb{R}$ est développable en série entière, alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Remarque 4 : L'égalité dans la définition précédente s'appelle le développement en série entière de la fonction f.

Corollaire 1 : Si une fonction est développable en série entière, alors son développement en série entière est unique.

Remarque 5 : On peut reformuler le corollaire précédent. Si $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont deux séries entières admettant un rayon de convergence $R > 0$, alors on a

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = b_n.$$

III.B - Développement en série entière des fonctions usuelles

Voici le développement en série entière de certaines des fonctions usuelles.

Développement en série entière	Intervalle ouvert de convergence	Rayon de convergence
$\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$I =]-1,1[$	$R = 1$
$\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	$I =]-1,1[$	$R = 1$
$\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	$I =]-1,1[$	$R = 1$
$\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$I =]-1,1[$	$R = 1$
$\exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$I = \mathbb{R}$	$R = +\infty$
$\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$I = \mathbb{R}$	$R = +\infty$
$\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$I = \mathbb{R}$	$R = +\infty$

Théorème 1 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a la relation

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Remarques 6 :

a) Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, le rayon de convergence de la série entière ci-dessus est $R = 1$.

b) Si $\alpha \in \mathbb{N}$, le rayon de convergence de la série entière ci-dessus est $R = +\infty$ (car la somme est finie) et la relation précédente est valable sur $\mathbb{R}$ (on retrouve le binôme de Newton).

IV - Exponentielle complexe

Rappelons que l'exponentielle d'un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est le nombre complexe défini par

$$\exp(z) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)).$$

Théorème 2 : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a l'égalité

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$