CHAPITRE 5
Réduction d'endomorphismes

Exercice 1 :

1. Montrons que φ est linéaire. Soient $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned}\varphi(M+\lambda N) &= (M+\lambda N) + \mathrm{Tr}(M+\lambda N)\mathrm{I}_n\\ &= (M+\mathrm{Tr}(M)\cdot \mathrm{I}_n) + (N+\mathrm{Tr}(N)\cdot\mathrm{I}_n)\\ &= \varphi(M)+\lambda\varphi(N).\end{aligned}$$
On en déduit que φ est un endomorphisme.
2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)$. Il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nul tel que
$$\varphi(M) = \lambda M \quad \Leftrightarrow \quad M + \mathrm{Tr}(M)\mathrm{I}_n = \lambda M \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Tr}(M)\mathrm{I}_n = (\lambda-1)M.$$
   - Si $\lambda = 1$, alors M est une matrice de trace nulle. Réciproquement, si M est une matrice de trace nulle, on a $\varphi(M) = M$.
   - Si $\lambda \neq 1$, alors M est une matrice scalaire et on trouve $\lambda = n+1$. Réciproquement, on a $\varphi(\mathrm{I}_n) = (n+1)\mathrm{I}_n$.

   Finalement $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{0, n+1\}$, $E_0(\varphi) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ et $E_{n+1}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$.

Exercice 2 : Le scalaire $\lambda \in \mathrm{Sp}(D)$ si et seulement s'il existe $f \in E$ non nul tel que
$$D(f) = \lambda f \quad \Leftrightarrow \quad f' = \lambda f.$$
Or les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions colinéaires à la fonction $t \mapsto \exp(\lambda t)$. Ainsi, l'équation admet toujours une solution non nulle. Finalement, on a $\mathrm{Sp}(D) = \mathbb{R}$ et $E_\lambda(D) = \mathrm{Vect}(t \mapsto \exp(\lambda t))$.

Exercice 3 : On doit déterminer les nombres $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que l'équation $AX = \lambda X$ est des solutions non nulles. L'équation se réécrit
$$\left\{\begin{array}{ccc} x+y+z+t &=& \lambda x\\ x+y &=& \lambda y\\ x+z &=& \lambda z\\ x+t &=& \lambda t\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x+y+z+t &=& \lambda x\\ x+y &=& \lambda y\\ z-y &=& \lambda(z-y)\\ t-y &=& \lambda(t-y)\end{array}\right.$$
On peut distinguer deux cas.
- Si $\lambda = 1$, le système équivaut après simplification à
$$\left\{\begin{array}{ccc} y+z+t &=& 0\\ x &=& 0\end{array}\right.$$
qui admet des solutions non nulles, donc $1 \in \mathrm{Sp}(A)$.
- Si $\lambda \neq 1$, le système équivaut à
$$\left\{\begin{array}{ccc} (\lambda^2-2\lambda-2)y &=& 0\\ x &=& (\lambda-1)y\\ z &=& y\\ t &=& y.\end{array}\right.$$
Ce système admet des solutions non nulles si et seulement si
$$\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Finalement, on a $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\}$. En procédant de même, on trouve
$$\mathrm{Sp}(B) = \left\{0, \frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}(C) = \left\{0, 1+\sqrt{5}, 1-\sqrt{5}\right\} \quad .$$

Exercice 4 :

1. La matrice de φ dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{C}_3[X]$ est
$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\end{pmatrix}.$$
On en déduit que $\chi_\varphi(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_4 - M) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$.

2. On a $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{-1, 1\}$, $m_1(\varphi) = 2$ et $m_{-1}(\varphi) = 2$.
3. En utilisant M, on trouve

$$E_1(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^3 + 1, X^2 + X), \quad E_{-1}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^3 - 1, X^2 - X).$$

   Comme $\dim E_1(\varphi) + \dim E_{-1}(\varphi) = 4$, on en déduit que φ est diagonalisable.

Exercice 5 :

1. La linéarité ne pose pas de soucis. De plus, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$, donc u est un endomorphisme.
2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$u(X^k) = \left(\frac{X+1}{2}\right)^k = \frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}X^i = \frac{X^k}{2^k} + \cdots$$

   On en déduit que la matrice de u dans la base canonique est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & (*) \\ & 1/2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1/2^n \end{pmatrix}$$

3. Comme la matrice M est triangulaire, ces valeurs propres sont sur la diagonale, donc $\mathrm{Sp}(u) = \{1, 1/2, \ldots, 1/2^n\}$ et les valeurs propres sont simples.
4. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$u((X-1)^k) = \left(\frac{X+1}{2} - 1\right)^k = \frac{1}{2^k}(X-1)^k,$$

   donc $(X-1)^k \in E_{2^{-k}}(u)$. Comme chaque valeur propre est simple, on en déduit que $\dim E_{2^{-k}}(u) = 1$, donc $E_{2^{-k}}(u) = \mathrm{Vect}((X-1)^k)$.

Exercice 6 : Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+4)$, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-4, 1, 2\}$. Comme χ_A est scindé à racines simples, la matrice A est diagonalisable. De plus, on a

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}, \quad E_{-4}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix}1&4&2\\1&3&-3\\1&-2&2\end{pmatrix}.$$

Pour la matrice B, on a $\chi_B(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$. De plus, on a

$$E_1(B) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_2(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}\right).$$

Comme $\dim E_1(B) + \dim E_2(B) = 3$, la matrice B est diagonalisable. On a $B = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix}1&1&3\\1&0&2\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

Pour la matrice C, on a $\chi_C(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$. Le discriminant du second facteur est strictement négatif, donc χ_C n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Ainsi, C n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 : Pour la matrice A, on a $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)^3$. De plus, on a

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Comme $\dim E_1(A) = 1 < 3 = m_1(A)$, la matrice A n'est pas diagonalisable.
Pour la matrice B, on a $\chi_B(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-\mathrm{j})(\lambda-\bar{\mathrm{j}})$ où $\mathrm{j} = (-1+\mathrm{i}\sqrt{3})/2$. Comme χ_B est scindé à racines simples, la matrice B est diagonalisable. De plus, on a

$$E_1(B) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad E_{\mathrm{j}}(B) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\\bar{\mathrm{j}}\\\mathrm{j}\end{pmatrix}, \quad E_{\bar{\mathrm{j}}}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\\mathrm{j}\\\bar{\mathrm{j}}\end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a $B = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\mathrm{j}&0\\0&0&\bar{\mathrm{j}}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&\bar{\mathrm{j}}&\mathrm{j}\\1&\mathrm{j}&\bar{\mathrm{j}}\end{pmatrix}.$$

Pour la matrice C, on a $\chi_C(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-(1+\mathrm{i}))(\lambda-(2+\mathrm{i}))$. Comme χ_C est scindé à racines simples, la matrice C est diagonalisable. De plus, on a

$$E_2(C) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}, \quad E_{1+\mathrm{i}}(C) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad E_{2+\mathrm{i}}(C) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a $C = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1+\mathrm{i}&0\\0&0&2+\mathrm{i}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix}-2&1&1\\3&-1&-2\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 8 : Pour la matrice A_m, on a $\chi_{A_m}(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-m)$. On en déduit que si $m \notin \{1,2\}$, alors le polynôme caractéristique de A_m est scindé à racines simples, donc A_m est diagonalisable. Pour $m = 1$, on a

$$E_1(A_1) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Comme $\dim E_1(A_1) = 1 < 2 = m_1(A_1)$, on en déduit que A_1 n'est pas diagonalisable. Pour $m = 2$, on a

$$E_2(A_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

On a $\dim E_2(A_2) = 2 = m_2(A_2)$ et $\dim E_1(A_2) = 1 = m_1(A_2)$, donc A_2 est diagonalisable. Finalement A_m est diagonalisable si et seulement si $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Pour la matrice B_m, on a $\chi_{B_m}(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-7)(\lambda-m)$. On en déduit que si $m \notin \{2,7\}$, alors le polynôme caractéristique de B_m est scindé à racines simples, donc B_m est diagonalisable. Pour $m = 2$, on a

$$E_2(B_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

On a $\dim E_2(B_2) = 2 = m_2(B_2)$ et $\dim E_7(B_2) = 1 = m_7(B_2)$, donc B_2 est diagonalisable. Pour $m = 7$, on a

$$E_7(B_7) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

On a $\dim E_7(B_7) = 2 = m_7(B_7)$ et $\dim E_2(B_7) = 1 = m_2(B_7)$, donc B_7 est diagonalisable. Finalement, la matrice B_m est diagonalisable pour tout $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 : On a $J = PDP^{-1}$ avec

$$D = \mathrm{Diag}(n,0,\dots,0) \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&-1&0&\cdots&0\\\vdots&0&-1&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\1&0&\cdots&0&-1\end{pmatrix}.$$

Exercice 10 : On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

On en déduit que $A^n = PD^nP^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2^n+4^n&0&2^n-4^n\\2(4^n-2^n)&2\cdot 4^n&2(4^n-2^n)\\2^n-4^n&0&2^n+4^n\end{pmatrix}.$

Exercice 11 :

1. On a $A = PDP^{-1}$ avec
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
2. On note $\Delta = \mathrm{Diag}(1, -2)$. On a $\Delta^3 = D$, donc
$$B = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
vérifie $B^3 = P\Delta^3 P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

Exercice 12 : L'endomorphisme v est diagonalisable, donc il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$ doit diagonale. Si l'on note $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, alors il existe des nombres $\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbb{C}$ tel que $\delta_i^2 = \alpha_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On considère l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $\Delta = \mathrm{Diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$. Comme $\Delta^2 = D$, on a $u^2 = v$.

Exercice 13 :

1. Le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 8)$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 8\}$. De plus, on a
$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_8(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$
Comme $\dim(E_1(A)) = 2 < 3 = m_1(A)$, la matrice A n'est pas diagonalisable.
2. On cherche une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que
$$AV_1 = 0, \quad AV_2 = V_1, \quad AV_3 = 8V_3.$$
Ainsi, on choisit $V_1 \in E_0(A)$, $V_3 \in E_8(A)$ et $V_2 \in \mathbb{R}^3$ avec $AV_2 = V_1$. On peut prendre
$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
Ainsi, on a $A = PTP^{-1}$ avec
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -1 & -2 & -11 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 :

1. Le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. De plus, on a
$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$
Comme $\dim(E_1(A)) = 2 < 3 = m_1(A)$, la matrice A n'est pas diagonalisable.
2. On cherche une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que
$$AV_1 = V_1, \quad AV_2 = V_2, \quad AV_3 = V_2 + V_3.$$
Ainsi, on choisit $V_1, V_2 \in E_1(A)$ de sorte qu'il existe $V_3 \in \mathbb{R}^3$ avec $(A - \mathrm{I}_3)V_3 = V_2$. On peut prendre
$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Ainsi, on a $A = PTP^{-1}$ avec
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
3. On a
$$A^n = PT^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-n & -n \\ 0 & n & n+1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 : La matrice A est trigonalisable, donc il existe $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$. Les éléments diagonaux de T sont les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ de A. De plus, on a $A^2 = PT^2P^{-1}$ et les éléments diagonaux de T^2 sont $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ et ce sont aussi les valeurs propres de A^2. Finalement

$$\mathrm{Sp}\left(A^2\right) = \left\{\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2\right\} = \left\{\lambda^2 \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\right\}.$$

Exercice 16 : On a

(i) $u_n = 2^{2-n} - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $u_n = 2^n(1-n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $u_n = (5-3n)3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(iv) $u_n = 5 \cdot 3^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + 3^{n-1}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(v) $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(vi) $u_n = 2\cos\left((n-1)\frac{\pi}{3}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.