CHAPITRE 5

Réduction d'endomorphismes

I - Valeurs propres et vecteurs propres

Exercice 1 : On considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = M + \text{Tr}(M) \cdot I_n.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 2 : Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à $f \in E$ associe f' . Déterminer les éléments propres de D .

Exercice 3 : Déterminer les valeurs propres dans $\mathbb{R}$ des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

II - Endomorphismes et matrices diagonalisables

Exercice 4 : On considère l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{C}_3[X] \rightarrow \mathbb{C}_3[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{C}_3[X], \quad \varphi(P) = X^3 P(1/X).$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de φ .
2. Donner les valeurs propres de φ et leur multiplicité.
3. Déterminer les sous-espaces propres de φ . Est-ce que φ est diagonalisable?

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application u définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad u(P) = P\left(\frac{X+1}{2}\right).$$

1. Justifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que sa matrice dans la base canonique est triangulaire supérieure.
3. En déduire les valeurs propres de u et leur multiplicité.
4. Calculer $u((X-1)^k)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En déduire les sous-espaces propres de u .

Exercice 6 : On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Répondre aux questions suivantes pour chacune des matrices ci-dessus.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice.
2. Déterminer les éléments propres de la matrice sur $\mathbb{R}$.
3. La matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Si oui, la diagonaliser.

Exercice 7 : On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & -1 & -1+2i \\ 2 & 3+i & 1-3i \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Répondre aux questions suivantes pour chacune des matrices ci-dessus.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice.
2. Déterminer les éléments propres de la matrice sur $\mathbb{C}$.
3. La matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Si oui, la diagonaliser.

Exercice 8 : Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}, \quad B_m = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ m^2-7m & m-7 & m \end{pmatrix}.$$

Répondre aux questions suivantes pour chacune des matrices ci-dessus.

- Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice.
- Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Diagonaliser la matrice $J = (1)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Diagonaliser la matrice A , puis en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

- Diagonaliser la matrice A .
- Déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.

Exercice 12 : Soit v un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = v$.

III - Endomorphismes et matrices trigonalisables

Exercice 13 : On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer les éléments propres de A . La matrice A est-elle diagonalisable?
- Montrer que les matrices A et T sont semblables.

Exercice 14 : On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer les éléments propres de A . La matrice A est-elle diagonalisable?
- Montrer que les matrices A et T sont semblables.
- Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\text{Sp}(A^2) = \{\lambda^2 \in \mathbb{C} \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.

IV - Suites récurrentes linéaires

Exercice 16 : Déterminer une expression explicite des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes.

- $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $u_0 = 5$, $u_1 = 6$ et $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $u_0 = 5$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = -9u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.