CHAPITRE 5
Réduction d'endomorphismes

Plan du chapitre

Introduction

Considérons un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Pour chaque base $\mathscr{B}$ de E, nous savons associer à u sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ dans la base $\mathscr{B}$. Pour faciliter la résolution de nombreux problèmes en algèbre linéaire (calcul des puissances d'une matrice par exemple), nous souhaiterions pouvoir choisir la base $\mathscr{B}$ de E de telle sorte que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit la plus simple possible.

En pratique, nous souhaiterions déterminer une base $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit diagonale, c'est à dire

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

D'un point de vue matriciel, le problème se reformule via la formule du changement de base. Nous étudierons à quelles conditions une matrice carrée $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est-elle semblable à une matrice diagonale, c'est à dire

$$\exists P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ inversible}, \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Plus généralement, il est naturel de se demander à quelles conditions deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, mais ce problème dépasse le cadre du programme.

Par définition, la relation $(*)$ se traduit par $f(v_i) = \lambda_i v_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Cette remarque nous amènera à étudier les couples $(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times E$ avec $v \neq 0_E$ vérifiant la relation $f(v) = \lambda v$. Nous déterminerons ensuite des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une base $\mathscr{B}$ vérifiant $(*)$. Finalement, nous utiliserons l'ensemble des résultats de ce chapitre pour étudier les suites récurrentes linéaires d'ordre deux.

Historiquement, l'ensemble des problèmes exposés ci-dessus ont étés résolus par les mathématiciens Weierstrass, Jordan et Frobenius entre 1868 et 1880.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On fixe également un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$.

I - Éléments propres et polynôme caractéristique

I.A - Éléments propres d'un endomorphisme

Définition (Valeur propre) : On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur $v \in E$ non nul tel que $f(v) = \lambda v$.

Définition (Vecteur propre) : On dit que $v \in E$ non nul est un vecteur propre de f s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda v$.

Remarque 1 : Un vecteur $v \in E$ non nul est un vecteur propre de f si et seulement si la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(v)$ est stable par f.

Exemple 1 : Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'endomorphisme défini par $f(P) = P + XP'$. On a $f(X^2) = 3X^2$, donc X^2 est un vecteur propre de f pour la valeur propre 3.

Définition (Sous-espace propre) : Le sous-espace propre de f associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ de f est le sous-espace vectoriel $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_E - f)$.

Remarque 2 : Le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ est l'ensemble constitué du vecteur nul et des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ.

Exemple 2 : Dans l'exemple précédent, on a après calcul $E_3(f) = \mathrm{Vect}(X^2)$.

Définition (Spectre) : Le spectre de f, noté $\mathrm{Sp}(f)$, est l'ensemble des valeurs propres de f.

Exemple 3 : Dans l'exemple précédent, on peut montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 2, 3\}$.

Proposition 1 : Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ sont des valeurs propres distinctes de f, alors la somme de sous-espaces vectoriels $E_{\lambda_1}(f) + \cdots + E_{\lambda_p}(f)$ est directe.

I.B - Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Définition (Polynôme caractéristique) : Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f est l'application $\chi_f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi_f(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - f).$$

Remarque 3 : Le polynôme caractéristique de f est une fonction polynômiale de degré n dont le coefficient dominant est égal à 1.

Exemple 4 : En reprenant l'exemple 1, on a $\chi_f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

Théorème 1 : Les valeurs propres de l'endomorphisme f sont les racines dans $\mathbb{K}$ du polynôme caractéristique χ_f.

Définition (Ordre de multiplicité d'une valeur propre) : L'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ de l'endomorphisme f, notée $m_\lambda(f)$, est l'ordre de multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique χ_f.

Exemple 5 : On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z).$$

Le polynôme caractéristique de f est

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3).$$

On en déduit que les valeurs propres de l'endomorphisme f sont 0 et 3 et les multiplicités sont $m_0(f) = 2$ et $m_3(f) = 1$. Les sous-espaces propres associés sont

$$E_0(f) = \mathrm{Vect}\big((1, 0, -1), (0, 1, -1)\big) \quad \text{et} \quad E_3(f) = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 1)\big).$$

Théorème 2 : Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f, on a l'inégalité

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(f)) \leqslant m_\lambda(f).$$

Exemple 6 : On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x, y + z, z).$$

Le polynôme caractéristique de f est $\chi_f(\lambda) = (\lambda - 1)^3$. On en déduit que f admet une unique valeur propre qui est 1 et que sa multiplicité est $m_1(f) = 3$. Le sous-espace propre associé est

$$E_1(f) = \mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,0,1)\big)$$

qui est de dimension 2.

I.C - Extension aux matrices

Dans cette partie, on fixe une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition : Toutes les définitions précédentes s'adaptent aux matrices carrées.

(i) On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M s'il existe un vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ non nul tel que $MX = \lambda X$.

(ii) On dit que $X \in \mathbb{K}^n$ non nul est un vecteur propre de M s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $MX = \lambda X$.

(iii) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M, le sous-espace propre de M associé à λ est le sous-espace vectoriel $E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{I}_n - M)$.

(iv) Le spectre de M, noté $\mathrm{Sp}(M)$, est l'ensemble des valeurs propres de M.

(v) Le polynôme caractéristique de la matrice M est l'application $\chi_M : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi_M(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - M).$$

Théorème 3 : Les valeurs propres de la matrice M sont les racines racines du polynôme caractéristique χ_M.

Remarque 4 : Les valeurs propres d'une matrices triangulaires sont ses coefficients diagonaux.

Définition (Ordre de multiplicité d'une valeur propre) : L'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ de la matrice M, noté $m_\lambda(M)$, est l'ordre de multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique χ_M.

Théorème 4 : Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de M, on a l'inégalité

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(M)) \leqslant m_\lambda(M).$$

Remarque 5 : Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Les propriétés de f se transposent naturellement à la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Par exemple :

a) Les valeurs propres de f sont les valeurs propres de M.

b) Si $v \in E$ est vecteur propre de f, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$ est vecteur propre de M.

c) Le polynôme caractéristique de f est égal à celui de M.

d) etc...

II - Endomorphismes et matrices diagonalisables

II.A - Cas des endomorphismes

Définition (Endomorphisme diagonalisable) : L'endomorphisme f est diagonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale.

Remarque 6 : On peut reformuler la définition précédente. L'endomorphisme f est diagonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E constitué de vecteurs propres pour f.

Exemple 7 : Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'endomorphisme défini par $u(P) = P + XP'$. Dans la base $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

donc l'endomorphisme f est diagonalisable.

Lemme 1 : L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E.

Théorème de caractérisation des endomorphismes diagonalisables : Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) L'endomorphisme f est diagonalisable.

(ii) On a la relation
$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = \dim(E).$$

(iii) Le polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et
$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f), \quad \dim(E_\lambda(f)) = m_\lambda(f).$$

Corollaire 1 : Si le polynôme caractéristique χ_f est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$, alors l'endomorphisme f est diagonalisable.

ATTENTION : La réciproque est fausse ! Par exemple si $E = \mathbb{R}^2$ et $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, alors le polynôme $\chi_f(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ n'est pas scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, mais l'endomorphisme f est diagonalisable car sa matrice dans la base canonique est I_2.

II.B - Cas des matrices

Dans cette partie, on fixe une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. De même, que pour la partie précédente, les propriétés s'adaptent aux matrices carrées.

Définition (Matrice diagonalisable) : La matrice M est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Lemme 2 : La matrice M est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à $\mathbb{K}^n$.

Théorème de caractérisation des matrices diagonalisables : Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) La matrice M est diagonalisable.

(ii) On a la relation
$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\lambda(M)) = \dim\left(\mathbb{K}^n\right).$$

(iii) Le polynôme caractéristique χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$ et
$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(M), \quad \dim(E_\lambda(M)) = m_\lambda(M).$$

Corollaire 2 : Si le polynôme caractéristique χ_M est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$, alors la matrice M est diagonalisable.

ATTENTION : La réciproque est fausse ! Par exemple, la matrice $\mathrm{I}_2 \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est diagonalisable, mais son polynôme caractéristique est $\chi_M(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ qui n'est pas scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

III - Endomorphismes et matrices trigonalisables

III.A - Cas des endomorphismes

Définition (Endomorphisme trigonalisable) : On dit que f est trigonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est triangulaire supérieure.

Théorème 5 : L'endomorphisme f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 3 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme de E est trigonalisable.

Théorème 6 : On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont les valeurs propres de f comptées avec multiplicité, alors

$$\mathrm{Tr}(f) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \quad \text{et} \quad \det(f) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Remarque 7 : En particulier, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les formules précédentes sont toujours vérifiées, car tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Exemple 8 : On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z).$$

Le polynôme caractéristique de f est $\chi_f(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$. Les valeurs propres de l'endomorphisme f sont 1 et 4 et les multiplicités sont $m_1(f) = 2$ et $m_4(f) = 1$. On a

$$\mathrm{Tr}(f) = 1 + 1 + 4 = 6 \quad \text{et} \quad \det(f) = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4.$$

III.B - Cas des matrices

Dans cette partie, on fixe une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. De même, que pour la partie précédente, les propriétés s'adaptent aux matrices carrées.

Définition (Matrice trigonalisable) : On dit que M est trigonalisable si M est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Théorème 7 : La matrice M est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 4 : Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Théorème 8 : On suppose que χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont les valeurs propres de M comptées avec multiplicité, alors

$$\mathrm{Tr}(M) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \quad \text{et} \quad \det(M) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Remarque 8 : En particulier, si on considère les valeurs propres complexes de M, les formules précédentes sont vérifiées.

IV - Application aux suites récurrentes linéaires

On fixe un élément $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Nous allons étudier l'ensemble des suites

$$F=\left\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\;\middle|\;\forall n\in\mathbb{N},\;\; u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n=0\right\}.$$

Un élément de F est appelé une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Proposition 2 : L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition (Équation caractéristique) : L'équation caractéristique associée à une suite de F est $r^2+ar+b=0$.

Théorème 9 : Soit (u_n) une suite de F. On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique $r^2+ar+b=0$.

(i) Cas $\Delta>0$. Si $r_1,r_2\in\mathbb{R}$ sont les racines de l'équation caractéristique, alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\alpha r_1^n+\beta r_2^n.$$

(ii) Cas $\Delta=0$. Si $r\in\mathbb{R}$ est la racine double de l'équation caractéristique, alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=(\alpha+\beta n)r^n.$$

(iii) Cas $\Delta<0$. Si $z,\bar{z}\in\mathbb{C}$ sont les racines conjuguées de l'équation caractéristique, alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\alpha\rho^n\cos(n\theta)+\beta\rho^n\sin(n\theta)$$

où $\rho=|z|$ et $\theta=\arg(z)$.

Remarque 9 : Soit $(u_n)\in F$. La démonstration du théorème repose sur l'idée suivante. Si l'on introduit les matrices

$$A=\begin{pmatrix}-a & -b\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad X_n=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix},$$

alors on a le relation $X_{n+1}=AX_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On en déduit par récurrence la relation $X_n=A^nX_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ainsi, il suffit de calculer les puissances de la matrice A pour obtenir une expression explicite de la suite (u_n).

Exemple 9 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0=4$, $u_1=1$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=-u_{n+1}+2u_n.$$

L'équation caractéristique associée est $r^2+r-2=0$. Son discriminant est $\Delta=9$ et ses racines sont 1 et -2. En appliquant le résultat précédent et en utilisant les conditions initiales, on trouve que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=3+(-2)^n.$$

Exemple 10 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$, $u_1=2$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n.$$

L'équation caractéristique associée est $r^2-2r+2=0$. Son discriminant est $\Delta=-4$ et ses racines sont $1+\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$. On note $\rho=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$ et $\theta=\arg(z)=\pi/4$. En appliquant le résultat précédent, on en déduit qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\alpha(\sqrt{2})^n\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\beta(\sqrt{2})^n\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right).$$

Avec les conditions initiales, on trouve

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=(\sqrt{2})^n\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)+(\sqrt{2})^n\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right).$$

V - Méthodes

V.A - Diagonaliser une matrice

On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ que l'on souhaite diagonaliser sur $\mathbb{K}$.

Méthode : Diagonaliser une matrice

1) On calcule le polynôme caractéristique de A.
   a) Si χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$. On conclut que l'on ne peut pas la diagonaliser sur $\mathbb{K}$.
   b) Sinon, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres de A.
2) On détermine une base $\mathscr{B}_k$ de chaque sous-espace propre $E_{\lambda_k}(A)$ de A.
   a) Si pour une valeur propre λ_k de A, on a $\dim(E_{\lambda_k}(A)) < m_{\lambda_k}(A)$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$. On conclut que l'on ne peut pas la diagonaliser sur $\mathbb{K}$.
   b) Sinon, on passe au point suivant.
3) On note $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p)$ qui est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. Si $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a par la formule du changement de base

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = P_{\mathscr{C} \to \mathscr{B}}$$

et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice diagonale

$$D = \operatorname{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_{\lambda_1}(A)}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{m_{\lambda_2}(A)}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_{\lambda_p}(A)}).$$

Exemple 11 : On souhaite diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Le polynôme χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, car ses racines ne sont pas dans $\mathbb{R}$. On en déduit que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 12 : On reprend la matrice A de l'exemple précédent que l'on souhaite diagonaliser sur $\mathbb{C}$. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i})$$

qui est scindé sur $\mathbb{C}$. On obtient que $\operatorname{Sp}(A) = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$. On détermine une base de chacun des sous-espaces propres.

$$E_{\mathrm{i}}(A) = \operatorname{Ker}(\mathrm{i}\,\mathrm{I}_2 - A) = \operatorname{Ker}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}\right),$$

$$E_{-\mathrm{i}}(A) = \operatorname{Ker}(-\mathrm{i}\,\mathrm{I}_2 - A) = \operatorname{Ker}\left(\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}\right).$$

Comme la condition

$$\dim E_{\mathrm{i}}(A) + \dim E_{-\mathrm{i}}(A) = 1 + 1 = \dim\left(\mathbb{C}^2\right),$$

est vérifiée, on en déduit que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Finalement, on a

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Remarque 10 : On constate dans l'exemple ci-dessus que les vecteurs propres sont conjugués. En fait, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une valeur propre de A, alors $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A et les sous-espaces propres sont conjugués. En effet, on a

$$X \in E_\lambda(A) \quad \Leftrightarrow \quad AX = \lambda X \underset{\substack{\text{Conjugaison} \\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}{\Longleftrightarrow} A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{X} \in E_{\bar{\lambda}}(A).$$

En particulier, si on a $E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_p)$, alors

$$E_{\bar{\lambda}}(A) = \mathrm{Vect}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_p).$$

Exemple 13 : On souhaite diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

qui est scindé sur $\mathbb{R}$. On obtient que $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. On détermine le sous-espace propre associé.

$$E_1(A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{I}_2 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi, on a

$$\dim E_1(A) = 1 < 2 = m_1(A),$$

donc la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 14 : On souhaite diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$$

qui est scindé sur $\mathbb{R}$. Les valeurs propres de A sont 1 et 4. On détermine une base de chacun des sous-espaces propres.

$$E_1(A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{I}_3 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right),$$

$$E_4(A) = \mathrm{Ker}(4\mathrm{I}_3 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Comme la condition

$$\dim E_1(A) + \dim E_4(A) = 2 + 1 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right),$$

est vérifiée, on en déduit que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Finalement, on a

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

V.B - Calculer les puissances d'une matrice diagonalisable

On considère une matrice diagonalisable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on souhaite calculer les puissances.

Méthode : Calculer les puissances d'une matrice diagonalisable

1) En utilisant la méthode précédente, on détermine une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
2) On détermine explicitement la matrice P^{-1}.
3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme D est diagonale, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & (0) \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Finalement, en remarquant que l'on a

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^{-1})^k \\ &= (PD\underbrace{P^{-1})(P}_{\mathrm{I}_n}D\underbrace{P^{-1})(P}_{\mathrm{I}_n}DP^{-1})\cdots(PD\underbrace{P^{-1})(P}_{\mathrm{I}_n}DP^{-1}) \\ &= PD^kP^{-1}, \end{aligned}$$

on peut calculer A^k car l'on connait P, D^k et P^{-1}.

Remarque 11 : Si on a seulement trigonalisé la matrice A, i.e. si on a déterminé une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$, alors on a encore

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k = PT^kP^{-1}.$$

Cependant, il faut réussir à calculer T^k pour en déduire A^k (il n'y a pas de formule générale pour T^k comme pour D^k).

Exemple 15 : On souhaite calculer les puissances de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

D'après l'exemple 14, on a

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^k+2 & 4^k-1 & 4^k-1 \\ 4^k-1 & 4^k+2 & 4^k-1 \\ 4^k-1 & 4^k-1 & 4^k+2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$