Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Annexe 1
Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **scientifique**

Voie : **Technologie et sciences industrielles (TSI)**

Discipline : **Mathématiques**

Première année

Classe préparatoire TSI première année
Programme de mathématiques

Table des matières

Objectifs de formation

Le programme de mathématiques de TSI s'inscrit entre deux continuités : en amont avec les programmes rénovés du lycée, en aval avec les enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études universitaires. Il est conçu pour amener progressivement tous les étudiants au niveau requis pour poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant, de scientifique, et aussi pour leur permettre de se former tout au long de la vie.
Le programme du premier semestre est conçu de façon à viser trois objectifs majeurs :

– assurer la progressivité du passage aux études supérieures, en tenant compte des nouveaux programmes du cycle terminal, dont il consolide et élargit les acquis en prenant appui sur divers chapitres des classes de Terminales STI2D et STL : notations et raisonnement mathématiques, nombres complexes, géométrie dans le plan et dans l'espace, fonctions usuelles, équations différentielles ;
– consolider la formation des étudiants dans les domaines de la logique, du raisonnement et des techniques de calcul, qui sont des outils indispensables tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines scientifiques ;
– présenter des notions nouvelles riches, de manière à susciter l'intérêt des étudiants.

Compétences développées

Les étudiants des classes préparatoires doivent acquérir les compétences nécessaires aux scientifiques et technologues, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs, enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour y faire face, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe.
Dans ce cadre, la formation mathématique vise le développement des compétences générales suivantes :

– **s'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
– **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
– **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
– **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
– **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
– **communiquer à l'écrit et à l'oral** : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

S'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques, permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences industrielles de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités.
La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles de l'ingénieur, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension-même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme ; les équations différentielles sont au cœur des activités de modélisation pour les sciences physiques et les sciences industrielles de l'ingénieur ; les probabilités permettent d'illustrer certains résultats d'analyse et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.
C'est ainsi que le programme valorise les interprétations des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie et des probabilités en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques, chimiques ou industriels (mouvement, vitesse et accélération, signaux continus ou discrets, mesure des grandeurs mécaniques ou physiques…).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions, notamment dans le cadre des travaux d'initiative personnelle encadrés.
Les professeurs de mathématiques doivent régulièrement accéder aux laboratoires afin de favoriser l'établissement de liens forts entre la formation mathématique et les formations dispensées dans les enseignements scientifiques et technologiques. Cet accès permet de :
– prendre appui sur les situations expérimentales rencontrées dans ces enseignements ;

– connaître les logiciels utilisés et l'exploitation qui peut en être faite pour illustrer les concepts mathématiques ;
– prendre en compte les besoins mathématiques des autres disciplines.

Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un problème spécifique et la construction, pour le résoudre, d'outils conceptuels qui, pris ensuite par les mathématiciens comme objets d'étude, ont pu ultérieurement servir au traitement d'autres classes de problèmes.

Architecture et contenu du programme

Le programme s'en tient à un cadre et à un vocabulaire théorique bien délimités, mais suffisamment efficaces pour l'étude de situations usuelles, et assez riches pour servir de support à une formation solide.
Il a été conçu pour s'adapter aux intentions de la réforme des séries STI2D et STL. Les étudiants de cette série ont désormais pour vocation d'entrer dans un cycle long de formation supérieure : le programme de mathématiques se doit d'être d'une ambition réaliste.
Les grands équilibres du programme n'ont pas été modifiés. C'est ainsi que les deux grands axes « Analyse et géométrie » et « Algèbre et géométrie » demeurent présents. S'y ajoute une introduction limitée d'un enseignement de probabilités visant à consolider les notions figurant dans le programme des Terminales STI2D et STL et à préparer celles qui seront ultérieurement introduites dans les grandes écoles. Les probabilités permettent de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des ponts avec les autres disciplines, et d'enrichir les thèmes susceptibles d'être abordés lors du TIPE.

En cohérence avec l'introduction d'un enseignement d'algorithmique au lycée, le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes qui doivent être connus et pratiqués par les étudiants. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

La géométrie, en tant qu'outil de modélisation et de représentation, est intégrée à l'ensemble du programme, qui préconise le recours à des figures pour aborder l'algèbre linéaire et les fonctions de variable réelle. En introduction à l'algèbre linéaire, le chapitre sur les systèmes linéaires permet de rappeler les propriétés élémentaires relatives aux droites du plan, aux droites et plans de l'espace, donnant du sens au volet affine de l'algèbre linéaire et s'appuyant sur les acquis du lycée.

Le choix a été fait d'introduire assez tôt dans l'année un module substantiel visant à consolider ou à introduire des pratiques de calcul (dérivation des fonctions, calcul de primitives, résolution de certains types d'équations différentielles) avant d'introduire les théories sous-jacentes, afin d'en faciliter l'assimilation.

Ces aménagements devraient permettre de constituer un programme cohérent autour de quelques notions essentielles, en dégageant les idées majeures et leur portée, en fournissant des outils puissants et efficaces, en évitant toute technicité gratuite, et en écartant les notions qui ne pourraient être traitées que de façon superficielle.

Le volume global du programme a été conçu pour libérer des temps dédiés à une mise en activité effective des étudiants. Cela doit être notamment la règle lors des séances de travaux dirigés et de travaux pratiques d'informatique.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours. À l'intérieur de chaque semestre, le professeur conduit en toute liberté, dans le respect de la cohérence de la formation globale, l'organisation de son enseignement et le choix de ses méthodes. En particulier, la chronologie retenue dans la présentation des différents chapitres du programme **ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression** : afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement **en coordination avec les disciplines scientifiques et technologiques**.

Les liens avec les disciplines scientifiques et technologiques sont identifiés avec le symbole ⇆ PC pour les liens avec la physique et la chimie, ⇆ SI pour les liens avec les sciences industrielles de l'ingénieur et ⇆ I pour les liens avec l'informatique. Le programme fait aussi des références à l'appendice « Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur ».

Usage de la liberté pédagogique

Dans le cadre de la liberté pédagogique qui lui est reconnue par la loi, le professeur choisit ses méthodes, sa progression, ses problématiques. Il peut organiser son enseignement en respectant deux grands principes directeurs :

- pédagogue, il privilégie la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. La pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative et l'autonomie des étudiants. Le choix des problématiques et des méthodes de résolution favorise cette mise en activité ;
- didacticien, il choisit le contexte favorable à l'acquisition des connaissances et au développement des compétences. La mise en perspective d'une problématique avec l'histoire des sociétés, des sciences et des techniques, mais aussi des questions d'actualité ou des débats d'idées, permet de motiver son enseignement.

PROGRAMME

Vocabulaire ensembliste et méthodes de raisonnement

Ce chapitre regroupe les différents points de vocabulaire, notations et raisonnements nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique. Ces notions sont introduites de manière progressive et trouvent naturellement leur place dans les autres chapitres, en vue d'être acquises en fin de premier semestre. Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme. Plusieurs groupes classiques étant rencontrés dans le cadre du programme, la terminologie associée peut être utilisée mais aucune connaissance théorique n'est exigible.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Rudiments de logique	
Quantificateurs.	Passer du langage naturel au langage formalisé en utilisant les quantificateurs. Formuler une négation. Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs pour formuler de façon précise certains énoncés et leur négation. En revanche, l'emploi des quantificateurs en guise d'abréviations est exclu.
Connecteurs logiques : disjonction (ou), conjonction (et), implication, équivalence.	Passer du langage naturel au langage formalisé en utilisant des connecteurs. Formuler une négation. $\leftrightarrows$ SI, I Ce chapitre est naturellement relié au chapitre de logique en sciences industrielles de l'ingénieur.
b) Ensembles	
Cette partie trouvera, entre autres, des applications dans le chapitre sur le dénombrement. On se limite à une approche naïve. Aucun développement n'est fait sur la théorie des ensembles.	
Appartenance, inclusion.	Démontrer une égalité, une inclusion de deux ensembles.
Sous-ensemble (ou partie) de E. Ensemble vide.	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, complémentaire.	Maîtriser le lien entre connecteurs logiques et opérations ensemblistes. Notations $\complement_E A$, $\overline{A}$, $E \setminus A$. $\leftrightarrows$ I
Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles.	Un élément de E^p est appelé p-liste ou p-uplet d'éléments de E.
Ensemble des parties d'un ensemble.	
c) Propriétés de $\mathbb{N}$ et raisonnement par récurrence	
L'objectif principal de cette partie est la maîtrise du principe de récurrence.	
Propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$.	Les propriétés de l'addition, de la multiplication et de la relation d'ordre dans $\mathbb{N}$ sont supposées connues. Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.
Définition du plus grand élément, du plus petit élément.	
Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément. Application au principe de récurrence.	Mener un raisonnement par récurrence simple ou avec prédécesseurs. $\leftrightarrows$ I
Toute partie majorée non vide de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément.	

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Autres méthodes de raisonnement	
Raisonnement par contraposition.	Écrire la contraposée d'une assertion.
Raisonnement par l'absurde.	Mener un raisonnement par l'absurde.
Principe d'analyse/synthèse.	Distinguer condition nécessaire et condition suffisante. L'objectif est de donner une méthode de résolution détaillée pour les exemples du programme nécessitant ce type de raisonnement. On se limite à des exemples simples. Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et de condition suffisante.
e) Applications	
Application (ou fonction) d'un ensemble E dans un ensemble F. Graphe d'une application.	Manipuler le langage élémentaire des applications. Faire le lien avec la notion de graphe. Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Toute formalisation est hors programme.
Restrictions.	Notation $f_{\|I}$.
Image directe, image réciproque.	On évitera tout développement technique sur la notion d'image réciproque introduite principalement en vue des probabilités. Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition.	Reconnaître une fonction composée.
Injection, surjection, bijection, réciproque d'une bijection. Application identité.	Résoudre des équations.

Premier semestre

Pratique calculatoire

Prenant appui sur les acquis de la classe de Terminale, ce chapitre a pour but de mettre en œuvre des techniques de calcul indispensables en mathématiques et dans les autres disciplines scientifiques. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul intégral et différentiel sont différées à des chapitres ultérieurs. Le point de vue adopté ici est principalement pratique. Le professeur organise ce chapitre de la façon qui lui semble la plus appropriée, en tenant compte des acquis des étudiants et des besoins des autres disciplines. Il est nécessaire d'insister sur ces notions tôt dans l'année afin de faciliter le reste de l'apprentissage.
Les objectifs de formation sont les suivants :
- *une bonne maîtrise des automatismes et du vocabulaire de base relatifs aux inégalités ;*
- *l'introduction de fonctions pour établir des inégalités ;*
- *la manipulation des fonctions classiques ;*
- *le calcul de limites, de dérivées et de primitives ;*
- *l'utilisation des notations techniques fondamentales du calcul algébrique.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Inégalités dans $\mathbb{R}$	
Inégalités larges, inégalités strictes, intervalles de $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations.	Dresser un tableau de signe. Résoudre des inéquations. Interpréter graphiquement une inéquation du type $f(x) \leqslant \lambda$. L'objectif est une maîtrise de la manipulation élémentaire des inégalités.
Valeur absolue, inégalité triangulaire.	Interpréter sur la droite réelle des inégalités du type $\|x-a\| \leqslant b$.
Majoration, minoration et encadrement de sommes, de produits et de quotients.	
b) Équations, inéquations polynomiales et trigonométriques	
Équation du second degré.	Déterminer le signe d'un trinôme.
Factorisation d'un polynôme dont une racine est connue.	Factoriser un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 dont une racine est connue. Il s'agit de consolider les acquis de la classe de Terminale.
Cercle trigonométrique, valeurs usuelles, formules exigibles : $$\cos(a+b), \sin(a+b), \cos(2x), \sin(2x)$$	Utiliser le cercle trigonométrique pour résoudre des équations et inéquations trigonométriques. Exprimer $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$. Factoriser des expressions du type $\cos(p)+\cos(q)$.
	Déterminer l'ensemble de définition de fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.
c) Calcul de limites en un point ou à l'infini	
Aucune étude théorique de la limite n'est abordée à ce stade. On s'appuiera sur les connaissances des limites acquises au lycée.	
Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'un inverse.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Exemples de formes indéterminées : $\infty-\infty$, $0\times\infty$, 1^{∞}, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.	Lever, sur des exemples simples, certaines formes indéterminées à l'aide de limites de taux d'accroissement, à savoir : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}$.
Croissances comparées.	On s'appuie sur l'étude de la dérivée faite au lycée. Calculer une limite par encadrement ou par comparaison.
Limite d'une fonction composée.	

d) Calcul de dérivées et de primitives

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivées des fonctions usuelles : $x\mapsto x^n$ avec $n\in\mathbb{Z}$, exp, ln, cos, sin.	Maîtriser le calcul des fonctions dérivées dans des cas simples. Aucune étude théorique de la dérivation n'est abordée à ce stade.
Opérations : somme, produit, quotient.	Dériver une fonction composée.
Dérivation de $t\mapsto\exp(\varphi(t))$ avec φ à valeurs dans $\mathbb{C}$.	
Primitive sur un intervalle.	Reconnaître des expressions du type $\frac{u'}{u}$, $u'u^n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{u'}{u^n}$, $u'.(v'\circ u)$ où v est une fonction dérivable afin d'en calculer les primitives.

e) Sommes et produits

Contenus	Capacités & Commentaires
Notations et règles de calcul.	Effectuer un changement d'indice. Sommes et produits télescopiques. L'objectif est de faire acquérir aux étudiants une aisance dans la manipulation des symboles $\sum$ et Π sur des exemples de difficulté raisonnable.
Factorielle, coefficients binomiaux.	Notations $n!$, $\binom{n}{k}$ lue « k parmi n ». Aucun lien avec le dénombrement n'est attendu à ce stade.
Triangle de Pascal, formule de binôme de Newton.	Développer $(a\pm b)^n$.
Factorisation de a^n-b^n pour $n\in\mathbb{N}^*$. Exemple de calcul de sommes : $\sum\limits_{k=0}^{n} k$ $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.	

Nombres complexes

L'objectif est de consolider et d'approfondir les acquis du cycle terminal. Le programme combine plusieurs aspects :
- *équations algébriques (équations du second degré, racines n-ièmes d'un nombre complexe) ;*
- *interprétation géométrique des nombres complexes ;*
- *exponentielle complexe et applications à la trigonométrie.*

Il est recommandé d'illustrer le cours de nombreuses figures et de relier ce chapitre aux besoins des disciplines scientifiques et technologiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes	
La construction de $\mathbb{C}$ n'est pas exigible.	
Parties réelle et imaginaire, forme algébrique. Opérations sur les nombres complexes.	Notations $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$.
Conjugaison : définition, compatibilité avec les opérations.	Interpréter géométriquement le conjugué d'un nombre complexe. Notation $\overline{z}$.
Le plan étant muni d'un repère orthonormal, affixe d'un point, d'un vecteur et image d'un nombre complexe.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormal direct.
Module d'un nombre complexe. Relation $\|z\|^2 = z\bar{z}$. Module d'un produit et d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Interpréter géométriquement le module d'un nombre complexe. Interpréter géométriquement $\|z-a\|$ avec $a, z \in \mathbb{C}$.
b) Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1	
Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$, formules d'Euler. Description des éléments de $\mathbb{U}$.	
Relation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)}$. Formule de Moivre.	Factoriser $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Linéariser et factoriser des expressions trigonométriques. Retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ pour de petites valeurs de n. Il s'agit de consolider une pratique du calcul, en évitant tout excès de technicité.
c) Arguments d'un nombre complexe non nul	
Arguments d'un nombre complexe non nul. Coordonnées polaires.	Écrire un nombre complexe non nul sous la forme $z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (forme trigonométrique). Interpréter géométriquement un argument d'un nombre complexe. Transformer $a\cos(t) + b\sin(t)$ en $A\cos(t-\varphi)$. ⇆ PC et SI. Amplitude et phase. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §5.
Arguments d'un produit, d'un quotient.	
d) Exponentielle complexe	
Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ où $z = x + iy$ et $x, y \in \mathbb{R}$.	Résoudre une équation du type $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'}$. Notations $\exp(z)$, e^z.
Relation $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'}$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
e) Équation du second degré dans $\mathbb{C}$	
Racines carrées d'un nombre complexe.	Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique ou trigonométrique.
Équation du second degré dans $\mathbb{C}$.	Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.
f) Racines n-ièmes	
Racines de l'unité : définition, description, propriétés.	Représenter géométriquement les racines de l'unité. Notation $\mathbb{U}_n$.
Description des racines n-ième d'un nombre complexe.	Résoudre l'équation $z^n = \lambda$.

Étude globale d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles

Dans le prolongement du cycle terminal du lycée, on consolide dans ce chapitre les méthodes d'étude et de représentation des fonctions réelles d'une variable réelle. Le champ des fonctions mobilisables est étendu : aux fonctions exponentielle et logarithme népérien et aux fonctions trigonométriques, étudiées en Terminale, on ajoute les fonctions puissances et les fonctions trigonométriques réciproques. Ce chapitre est naturellement à relier aux disciplines scientifiques et technologiques.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$	
Représentation graphique d'une fonction.	Représenter graphiquement une fonction donnée par son expression. Représenter graphiquement $x \mapsto f(x)+a$, $x \mapsto f(x \pm a)$, $x \mapsto f(ax)$ et $x \mapsto af(x)$ à partir du graphe de f. ⇆ PC SI : choix de l'origine des temps pour l'étude d'un signal.
Fonctions paires, impaires, périodiques.	Interpréter géométriquement ces propriétés.
Somme, produit, composée. Monotonie.	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Interpréter géométriquement ces propriétés. Une fonction f est bornée si et seulement si $\|f\|$ est majorée.
Extremum, extremum local.	
b) Dérivation	
Équation de la tangente en un point.	Interpréter géométriquement la dérivée d'une fonction en un point.
Application à l'étude des variations d'une fonction.	Dresser le tableau de variation d'une fonction. À ce stade, un tableau de variation clairement présenté, accompagné de la détermination du signe de la dérivée et des valeurs ou limites aux bornes, vaut justification de bijectivité.

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonction réciproque.	Tracer le graphe d'une fonction réciproque. Calculer la dérivée d'une fonction réciproque. La dérivée de la réciproque est obtenue géométriquement à l'aide de la symétrie des tangentes. La formule sera démontrée ultérieurement.

c) Étude d'une fonction

Plan d'étude d'une fonction.	Déterminer les symétries et les périodicités afin de réduire l'ensemble d'étude d'une fonction. Déterminer les variations et les limites d'une fonction. Déterminer les extremums éventuels d'une fonction. Tracer le graphe d'une fonction. Obtenir des inégalités grâce à une étude de fonction. Les asymptotes ainsi que la position des tangentes par rapport à la courbe seront traitées ultérieurement comme des applications des développements limités. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §3.

d) Fonctions usuelles

Valeur absolue.	Représenter graphiquement la fonction.
Partie entière.	Représenter graphiquement la fonction. Notation $\lfloor x \rfloor$. L'existence est admise.
Étude des fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Déterminer la dérivée, les variations et le graphe de ces fonctions. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
Fonctions circulaires directes et réciproques : rappels sur les fonctions cos et sin, définition et étude des fonctions tan, arcsin, arccos, arctan.	Déterminer la dérivée, les variations et le graphe de ces fonctions. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §3.
Croissances comparées des fonctions logarithme népérien, puissances et exponentielle.	Comparer des fonctions au voisinage de l'infini. Les fonctions hyperboliques sont hors programme.

Géométrie élémentaire du plan

À l'issue de la Terminale, les étudiants connaissent le plan géométrique euclidien en tant qu'ensemble de points, la façon d'associer à deux points A et B le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ainsi que les propriétés opératoires usuelles. Il convient d'observer que tout vecteur s'exprime comme combinaison linéaire de deux vecteurs indépendants, c'est-à-dire non colinéaires. Dans le plan, les notions suivantes sont supposées connues : calcul vectoriel, distance euclidienne, orthogonalité, repère orthonormal, angles. La donnée d'un repère orthonormal identifie le plan à $\mathbb{R}^2$ ou à $\mathbb{C}$. La géométrie joue un rôle essentiel en mathématiques et dans les disciplines scientifiques et technologiques ; elle est au cœur des compétences de modélisation et de représentation. Ce chapitre doit être traité en liaison avec les autres disciplines ; on pourra se reporter à l'appendice « Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur ».

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Repérage dans le plan	
Repère orthonormal (ou orthonormé). Coordonnées cartésiennes, coordonnées polaires.	Maîtriser le lien entre la géométrie pure et la géométrie repérée. Passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes. On peut, à cette occasion, introduire le vocabulaire relatif à l'algèbre linéaire : famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires.
b) Produit scalaire	
Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors $$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$$ et $\vec{u}.\vec{v} = 0$ sinon. Bilinéarité, symétrie.	Interpréter le produit scalaire en termes de projection orthogonale. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §4. Exprimer le produit scalaire dans une base orthonormale. Caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs. Déterminer une mesure d'un angle non orienté. Démonstrations non exigibles. ⇆ SI (Mécanique) ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §4. et 5
c) Déterminant dans une base orthonormée directe	
Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors $$[\vec{u},\vec{v}] = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v})$$ et $[\vec{u},\vec{v}] = 0$ sinon. Bilinéarité, antisymétrie.	Interpréter un déterminant en termes d'aire orientée d'un parallélogramme. Caractériser la colinéarité de deux vecteurs. La notion d'orientation du plan est admise, ainsi que celle de base orthonormale directe. Calculer le déterminant dans une base orthonormale directe. Démonstrations non exigibles. ⇆ SI (Mécanique) ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §4. et 5

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Droites	
Définition, vecteur directeur, vecteur normal. Équation cartésienne et système d'équations paramétriques.	Passer d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne et inversement. Déterminer l'intersection de deux droites. Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite. Calculer la distance d'un point à une droite. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §4.
e) Cercles	
Définition, équation cartésienne. Représentation paramétrique.	Reconnaître une équation cartésienne de cercle. Déterminer une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon. Déterminer le centre et le rayon d'un cercle à partir d'une équation. Déterminer une équation d'un cercle connaissant les extrémités d'un diamètre. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §4.
f) Exemples de transformations affines du plan	
Translation, rotation, homothétie, réflexion.	Utiliser divers modes de représentation de ces transformations : point de vue géométrique et point de vue analytique. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §4. ⇆ SI (Mécanique)

Géométrie élémentaire de l'espace

Dans ce chapitre, on adapte à l'espace les notions étudiées dans le chapitre de géométrie plane. L'étude de ce contenu mathématique nouveau s'appuie de façon essentielle sur le chapitre de géométrie plane et sur l'intuition géométrique développée dans les autres disciplines. Des notions telles que le repérage dans l'espace et le produit vectoriel doivent être abordées en concertation avec les professeurs des disciplines scientifiques et technologiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Repérage dans l'espace	
Repère orthonormal (ou orthonormé) de l'espace ; coordonnées cartésiennes.	Maîtriser le lien entre la géométrie pure et la géométrie repérée. On peut, à cette occasion, introduire le vocabulaire relatif à l'algèbre linéaire : famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires.

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Produit scalaire	
Définition géométrique. Bilinéarité, symétrie.	Exprimer le produit scalaire dans une base orthonormale directe. Démonstrations hors programme.
c) Produit vectoriel dans l'espace orienté	
Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur de norme $\|\|\vec{u}\|\|\,\|\|\vec{v}\|\|\,\|\sin(\vec{u},\vec{v})\|$ directement orthogonal à $(\vec{u},\vec{v})$; sinon le produit vectoriel est le vecteur nul.	La notion d'orientation de l'espace, reposant sur les conventions physiques usuelles, est admise.
Bilinéarité, antisymétrie.	Exprimer le produit vectoriel dans une base orthonormale directe. Déterminer si deux vecteurs sont colinéaires. Démonstrations hors programme. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §4. ⇆ SI (Cinématique)
d) Produit mixte dans l'espace orienté	
Définition du produit mixte de trois vecteurs : $$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = (\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}$$	Déterminer si trois vecteurs sont coplanaires. Interpréter $\left\|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right\|$ comme volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Notation $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §4.
Trilinéarité, antisymétrie.	Exprimer le produit mixte dans une base orthonormale directe. Démonstrations hors programme.
e) Plans et droites	
Différents modes de définition d'un plan : par un point et deux vecteurs non colinéaires, un point et un vecteur normal, trois points non alignés.	Déterminer une équation cartésienne ou un système d'équations paramétriques d'un plan. Passer d'une représentation à l'autre.
Différents modes de définition d'une droite : par un point et un vecteur directeur, par deux points distincts, comme intersection de deux plans.	Déterminer un vecteur directeur d'une droite définie comme intersection de deux plans. Déterminer un système d'équations cartésiennes ou un système d'équations paramétriques d'une droite. Passer d'une représentation à l'autre. Étudier les intersections. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §4.
Distance d'un point à un plan, distance d'un point à une droite.	Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite, sur un plan.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
f) Sphères	
Définition, équation cartésienne en repère orthonormé.	Reconnaître une équation cartésienne de sphère. Déterminer une équation d'une sphère à partir de son centre et de son rayon. Déterminer le centre et le rayon d'une sphère à partir d'une équation. Déterminer l'intersection d'une sphère et d'un plan.

Équations différentielles linéaires

En classe de Terminale, les étudiants ont étudié des exemples simples d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, du premier et du second ordre. Il s'agit dans ce chapitre de consolider et d'étendre cette étude. Les équations différentielles sont un domaine à la fois très riche pour les mathématiques, pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur. Ce chapitre doit être traité en concertation avec les professeurs des autres disciplines afin de l'illustrer par des exemples issus des domaines scientifiques et technologiques. On se référera à l'appendice « Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur ».

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation $y' + a(x)y = b(x)$, où a et b sont des fonctions, à valeurs réelles ou complexes, définies et continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$.	Écrire et résoudre l'équation homogène associée. Utiliser le principe de superposition ou la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière. Déterminer la solution générale de l'équation avec second membre comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière. Décrire l'ensemble des solutions. Les étudiants doivent savoir étudier des équations dans lesquelles la variable et la fonction inconnue sont représentées par d'autres lettres que x et y. À ce stade, la résolution ne doit pas faire appel à une intégration par parties ou à un changement de variable.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Déterminer la solution vérifiant une condition initiale donnée. ⇆ PC, SI : circuits électriques RC, RL.
b) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $y'' + ay' + by = f(x)$ où a et b sont des nombres réels et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	Donner l'équation caractéristique. Résoudre l'équation homogène, notamment dans le cas d'une équation de la forme $y'' \pm \omega^2 y = 0$. ⇆ Circuits électriques LC, RLC. Résistance des matériaux. Régime transitoire, régime stationnaire. Pôles d'un système. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §2.

Contenus	Capacités & Commentaires
	Déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $Ae^{\omega x}$ avec $(A, \omega) \in \mathbb{C}^2$. Utiliser le principe de superposition. Exprimer la solution générale de l'équation avec second membre comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière. Aucune technique n'est exigible pour toute autre forme de second membre.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Déterminer la solution vérifiant une condition initiale donnée. La démonstration est hors programme.

Dénombrement

Ce chapitre a pour but de présenter les bases du dénombrement, notamment en vue de l'étude des probabilités. Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- *on adopte un point de vue intuitif pour la définition d'un ensemble fini et la notion de cardinal ;*
- *parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;*
- *l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

Ce chapitre est également l'occasion d'aborder les coefficients binomiaux sous un autre angle que celui du chapitre « Pratique calculatoire ».

Contenus	Capacités & commentaires
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini non vide. L'ensemble vide est de cardinal nul.	Notations $\|A\|$, $\mathrm{Card}(A)$, $\#A$.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.	
Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	Maîtriser le langage des applications et des bijections dans le cadre des ensembles finis, et le relier aux notions élémentaires sur le dénombrement.
Opérations sur les ensembles et les cardinaux : union disjointe, union quelconque, complémentaire et produit cartésien.	La formule d'union disjointe peut être admise. La formule du crible est hors programme.
Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	
b) Dénombrement	
Nombre de p-uplets (ou p-listes) d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments.	Reconnaître des situations de dénombrement relevant de ce cadre. On n'utilise pas la notation A_n^p.
Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.	Reconnaître des situations de dénombrement relevant de ce cadre. Donner une interprétation combinatoire des propriétés suivantes : $$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}; \quad \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n;$$ $$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$ Notation $\binom{n}{p}$.

Systèmes linéaires

Il s'agit d'introduire des notions nouvelles pour les étudiants, qui ne les ont pas rencontrées dans le cycle terminal du lycée. L'objectif est double :
- *maîtriser la théorie des systèmes linéaires du point de vue de la méthode du pivot, pour son intérêt mathématique et algorithmique, ainsi que pour ses applications aux disciplines scientifiques et technologiques ;*
- *préparer l'introduction de l'algèbre linéaire abstraite, abordée au 2e semestre.*

Les résultats, présentés dans le cadre des systèmes à coefficients réels, sont étendus sans difficulté au cas des systèmes à coefficients complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Systèmes linéaires	
Définition d'un système linéaire de n équations à p inconnues.	Reconnaître qu'un système donné est un système linéaire. Les solutions sont définies comme éléments de $\mathbb{R}^p$.
Système homogène.	Système homogène associé à un système quelconque.
Matrice A d'un système linéaire ; matrice augmentée $(A\|B)$ où B est la colonne des seconds membres.	Calculer le produit d'une matrice par une colonne. Écrire un système sous la forme matricielle $AX = B$.
Opérations élémentaires sur les lignes d'un système ou d'une matrice : échange des lignes L_i et L_j, multiplication de L_i par $\lambda \neq 0$, ajout de $\lambda \cdot L_j$ à L_i pour $i \neq j$.	Interpréter les opérations sur les lignes en termes de système linéaire. Notations $L_i \leftrightarrow L_j$; $L_i \leftarrow \lambda L_i$; $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
Deux systèmes sont dits équivalents si on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.	
Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.	Maîtriser la notion de système équivalent.
Deux matrices sont dites équivalentes en lignes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.	Relier cette notion à la théorie des systèmes linéaires. Notation $A \underset{L}{\sim} A'$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Si on passe d'un système $\mathscr{S}$ à un autre système $\mathscr{S}'$ par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de $\mathscr{S}'$ s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de $\mathscr{S}$.	Cela justifie la présentation matricielle d'un système linéaire.

b) Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan

Une matrice est dite échelonnée en lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes : (i) si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ; (ii) à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non entièrement nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.	Reconnaître et exploiter des matrices échelonnées dans le cadre de l'étude de systèmes linéaires. Un schéma « en escalier » illustre la notion de matrice échelonnée. On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non entièrement nulle.
Une matrice échelonnée en lignes est dite échelonnée réduite en lignes lorsque tous les pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.	
Toute matrice non nulle est équivalente en lignes à une unique matrice échelonnée réduite en lignes.	Déterminer la matrice échelonnée réduite en lignes associée à un système donné. L'unicité est admise.

c) Résolution d'un système linéaire

Inconnues principales et inconnues secondaires (paramètres).	Faire le lien entre nombre d'équations, nombre d'inconnues et nombre de pivots. ⇆ PC SI : degrés de liberté en mécanique, système hyperstatique ou isostatique. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §1.
Rang d'un système linéaire.	Le rang est ici défini comme égal au nombre de pivots.
Système incompatible. Système compatible.	Déterminer des conditions de compatibilité pour un système donné.
Structure de l'ensemble des solutions d'un système compatible.	Résoudre un système compatible.

d) Famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Combinaison linéaire d'une famille finie $\mathscr{F}$ de vecteurs. Famille libre, famille liée.	Notation $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. Déterminer si une famille de vecteurs est libre ou liée.
Si A est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de p vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ de $\mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes : (i) la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre ; (ii) le système $AX = 0$ a pour seule solution la solution triviale ; (iii) le nombre de pivots est égal à p.	L'équivalence de ces trois propriétés dans un cadre général et formel n'est pas un attendu du programme. En revanche, sa mise en œuvre sur des exemples permet d'illustrer le changement entre les registres suivants : familles de vecteurs, matrices, systèmes.
Famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Si A est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de p vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ de $\mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes : (i) les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$; (ii) pour toute matrice colonne B à n lignes, le système $AX = B$ est compatible ; (iii) le nombre de pivots est égal à n.	Déterminer un système d'équations linéaires de $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. Donner une interprétation géométrique dans les cas $n = 2$ et $n = 3$. L'équivalence de ces trois propriétés dans un cadre général et formel n'est pas un attendu du programme. En revanche, sa mise en œuvre sur des exemples permet d'illustrer le changement entre les registres suivants : familles de vecteurs, matrices, systèmes. $\leftrightarrows$ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §1.

Deuxième semestre

Nombres réels et suites numériques

L'objectif est d'énoncer les propriétés fondamentales de la droite réelle, et de les appliquer à l'étude des suites, qui interviennent en mathématiques tant pour leur intérêt pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximations de nombres réels). Les notions de borne supérieure et inférieure sont introduites uniquement pour aboutir au théorème de la limite monotone.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres réels	
Ensembles usuels de nombres : entiers relatifs, nombres décimaux, nombres rationnels.	La construction de ces ensembles de nombres est hors programme.
Droite réelle.	Faire le lien avec la géométrie. La construction de $\mathbb{R}$ est hors programme.
Distance entre deux réels. La relation d'ordre $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$: majorant, maximum, minorant, minimum.	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$.	Déterminer les bornes supérieure et inférieure éventuelles de fonctions. Aucun développement n'est attendu.
Partie entière d'un nombre réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$.
Approximations décimales d'un nombre réel.	Déterminer les valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès. ⇆ I : représentation informatique des réels.
Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$: une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tout $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$, $[a,b] \subset I$.	
b) Généralités sur les suites réelles	
Modes de définition d'une suite.	Reconnaître une suite définie de façon explicite, implicite ou par récurrence. Reconnaître une suite extraite.
Opérations. Monotonie, stricte monotonie.	
Suites minorées, majorées, bornées.	Manipuler sur des exemples des majorations et minorations. Une suite (u_n) est bornée si et seulement si $(\|u_n\|)$ est majorée.
Suites arithmétiques et suites géométriques.	
c) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Prouver l'existence d'une limite ℓ en majorant $\|u_n - \ell\|$, notamment lorsque la suite vérifie une inégalité du type : $\|u_{n+1} - \ell\| \leqslant k\|u_n - \ell\|$. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Lien avec la définition vue en classe de Terminale. Notation $u_n \to \ell$.
Unicité de la limite.	Notation $\lim u_n$.
Suite convergente, suite divergente. Toute suite réelle convergente est bornée.	
Si une suite possède une limite (finie ou infinie) alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Prouver la divergence d'une suite à l'aide de suite(s) extraite(s).

Contenus	Capacités & Commentaires
Opérations sur les limites de suites : somme, multiplication par un scalaire, produit, inverse.	Lever une indétermination.
Cas des suites géométriques, arithmétiques. Passage à la limite dans une inégalité.	

d) Théorèmes d'existence d'une limite

Théorèmes de convergence par encadrement. Divergence par comparaison : si (u_n) tend vers $+\infty$ et si, pour tout n, on a $u_n \leqslant v_n$, alors (v_n) tend vers $+\infty$.	Adapter cet énoncé aux suites tendant vers $-\infty$.
Théorème de la limite monotone.	Exploiter ce théorème sur des exemples.
Théorème des suites adjacentes.	Il convient d'insister sur l'intérêt algorithmique de cette notion : résolution approchée par dichotomie d'une équation du type $f(x) = 0$ et approximations décimales d'un nombre réel.

e) Comparaisons de suites

Relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$. On définit ces relations à partir du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ en supposant que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
Croissances comparées des suites usuelles : $\ln^{\beta}(n)$, n^{α} et $\mathrm{e}^{\gamma n}$.	Traduire les croissances comparées à l'aide de o.
Liens entre les différentes relations de comparaison.	Équivalence entre les relations $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$.
Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient, les puissances.	Exploiter ces résultats pour déterminer le comportement asymptotique de suites.
Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	

Limites, continuité et dérivabilité

Ce chapitre est divisé en deux parties, consacrées aux limites et à la continuité pour la première, au calcul différentiel pour la seconde. On y formalise les résultats qui ont été utilisés d'un point de vue calculatoire dans le premier chapitre d'analyse.

Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et sont à valeurs réelles.

Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré sur a si a est réel, avec un intervalle $[A,+\infty[$ si $a=+\infty$, avec un intervalle $]-\infty,A]$ si $a=-\infty$.

A - Limites et continuité

L'essentiel du paragraphe a) consiste à adapter au cadre continu les notions déjà abordées pour les suites. Le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Limite finie ou infinie en un point ou en $\pm\infty$	
Étant donné un point a appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Maîtriser le formalisme mathématique de la définition de la limite et le mettre en relation avec l'intuition géométrique. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Unicité de la limite.	Notation $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$.
Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Extension de la notion de limite en a lorsque f est définie sur $I\setminus\{a\}$.	
Opérations sur les fonctions admettant une limite finie ou infinie en a.	Exploiter ces résultats sur des exemples. Adaptation des énoncés relatifs aux suites.
Image d'une suite de limite ℓ par une fonction admettant une limite en ℓ.	
b) Comparaison des fonctions	
Passage à la limite dans une inégalité. Théorème d'encadrement pour les fonctions.	
Théorème de la limite monotone.	Démonstration non exigible.
Relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence.	Adapter au cas des fonctions les définitions et les résultats étudiés sur les suites.
c) Continuité en un point	
Continuité de f en un point a de I.	Maîtriser le formalisme mathématique de la définition de la continuité. Pour a appartenant à I, la fonction f est continue en a si et seulement si elle admet une limite finie en a.
Continuité à droite et à gauche. Prolongement par continuité en un point.	Pour a n'appartenant pas à I, la fonction f a une limite finie en a si et seulement si elle se prolonge par continuité en a.

Contenus	Capacités & Commentaires
Opérations sur les fonctions continues : somme, produit, quotient, composition.	Exploiter ces résultats sur des exemples.

d) Continuité sur un intervalle

Définition. Opérations. Ensemble $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue.	Appliquer le procédé de dichotomie à l'approximation d'un zéro d'une fonction continue. La démonstration n'est pas exigible. ⇆ I : application de la dichotomie à l'approximation d'un zéro d'une fonction continue.
Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.

e) Continuité et bijectivité

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$; sa réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$ (de même monotonie que la fonction f).	Appliquer ce résultat sur des exemples. Comparer la représentation graphique d'une fonction continue strictement monotone et celle de sa réciproque. La démonstration est hors programme.

B - Dérivabilité

Contenus	Capacités & commentaires

a) Nombre dérivé, fonction dérivée

Dérivabilité de f en a, nombre dérivé.	Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point particulier, à partir de la définition. Notation $f'(a)$.
Équivalence avec l'existence d'un développement limité en a à l'ordre 1.	La droite d'équation $$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$ est appelée tangente au graphe de f au point d'abscisse a. Cette définition peut être justifiée (limite de sécantes). Interprétation cinématique. ⇆ I : méthode de Newton.
Dérivabilité à droite et à gauche en a.	
Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.	

b) Opérations sur les fonctions dérivables

Si f et g sont dérivables en a, dérivabilité et dérivée en a de $f+g$, $f\,g$ et, si $g(a)\neq 0$, de $\dfrac{f}{g}$.	
Dérivabilité et dérivée en a de $g\circ f$ lorsque f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Si f est une fonction continue et strictement monotone (donc bijective) de l'intervalle I sur l'intervalle J et si f est dérivable en a, condition nécessaire et suffisante de dérivabilité de f^{-1} en $f(a)$ et calcul de la dérivée en ce point.	
Extension des résultats précédents aux fonctions dérivables sur un intervalle. En particulier, propriétés de la réciproque d'une bijection de classe $\mathscr{C}^1$.	

c) Propriétés des fonctions dérivables

Contenus	Capacités & Commentaires
Notion d'extremum local. Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §3.
Théorème de Rolle.	Utiliser le théorème de Rolle pour établir l'existence de zéros d'une fonction. Démonstration non exigible.
Égalité des accroissements finis.	Interpréter ce résultat de manière géométrique et cinématique. Démonstration non exigible.
Inégalité des accroissements finis : si une fonction f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, vérifie pour tout t de $]a,b[$, $\lvert f'(t)\rvert \leqslant M$, alors, pour tous x, y de $[a,b]$, on a $\lvert f(x)-f(y)\rvert \leqslant M\lvert x-y\rvert$.	
Caractérisation des fonctions constantes, croissantes, strictement croissantes, parmi les fonctions dérivables.	Appliquer ces résultats sur des exemples. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §3.
Théorème de la limite de la dérivée : si f est dérivable sur $I\setminus\{a\}$, continue sur I et si $f'(x)$ tend vers ℓ (réel ou infini) lorsque x tend vers a, alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a.	Interpréter géométriquement ce résultat. Si ℓ est un nombre réel, alors f est dérivable en a, $f'(a)=\ell$ et f' est continue en a.

d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle I, où k appartient à $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$,	Ensemble $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$.
Opérations : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composée, réciproque.	Maîtriser le calcul des fonctions dérivées. Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §3.

Intégration sur un segment

L'objectif de ce chapitre est de consolider, d'approfondir et d'étendre la notion d'intégrale étudiée au lycée. La présentation de l'intégrale d'une fonction positive sur un segment s'appuie sur la notion d'aire, mais tout développement théorique sur ce sujet est hors programme. Le cas des fonctions à valeurs réelles est étendu sans difficulté au cas complexe.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Intégrale d'une fonction continue sur un segment	
Intégrale $\int_{[a,b]} f$ d'une fonction f continue sur un segment $[a,b]$.	Interpréter géométriquement l'intégrale d'une fonction positive (aire sous la courbe). Modéliser une situation physique par une intégration. La construction est hors programme. Notations $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b f$. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §3.
Valeur moyenne. Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.	
Inégalité $\left\lvert\int_{[a,b]} f\right\rvert \leqslant \int_{[a,b]} \lvert f\rvert$.	Majorer et minorer une intégrale.
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$.
Une fonction continue et positive sur $[a,b]$ (où $a<b$) est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.	
b) Sommes de Riemann et méthode des rectangles	
Si f est une fonction continue de $[a,b]$ (où $a<b$) dans $\mathbb{C}$, alors $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	Interpréter géométriquement cette propriété. Démonstration dans le cas d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Approximer une intégrale par la méthode des rectangles ou la méthode des trapèzes. ⇆ I
c) Calcul intégral	
Si f est une fonction continue sur I et si x_0 est un point de cet intervalle, alors $$x \longmapsto \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en x_0. En particulier, toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.	Appliquer ce théorème sur des exemples. Deux primitives d'une fonction continue sur l'intervalle I, diffèrent d'une constante.
Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Pour f de classe $\mathscr{C}^1$: $$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b)-f(a).$$	
Intégration par parties.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Changement de variable : si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors, pour tous a et b dans I, $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$	Appliquer ces techniques au calcul de primitives. Tout excès de technicité est exclu.
Primitives des fonctions usuelles.	Savoir reconnaître des primitives usuelles. Pour les fonctions rationnelles, on se limite à des cas simples : aucune théorie de la décomposition en éléments simples n'est au programme.

d) Formule de Taylor avec reste intégral

Pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n.	Exploiter la formule de Taylor avec reste intégral pour établir des égalités, des inégalités.

Développements limités

L'objectif est la maîtrise du calcul de développements limités simples. Le calcul de développements limités à un ordre élevé n'est pas un objectif du programme ; il relève des outils logiciels.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Si f est définie sur l'intervalle I et si a est un point de I ou une extrémité de I, développement limité d'ordre n de f au voisinage de a.	Interpréter un développement limité comme approximation d'une fonction. Ramener un développement limité en 0 par translation. Adaptation au cas où f est définie sur $I \setminus \{a\}$.
Unicité, troncature.	Développement limité en 0 d'une fonction paire ou impaire.
Forme normalisée d'un développement limité : $$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\left(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o\left(h^n\right)\right)$$ avec $a_0 \neq 0$. Équivalence $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0 h^p$.	Étudier le signe d'une fonction au voisinage d'un point à l'aide d'un développement limité.
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit.	Exploiter la forme normalisée pour prévoir l'ordre d'un développement limité.
Composition, application au quotient.	Déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée. Aucun résultat général sur ce point n'est exigible. La division selon les puissances croissantes est hors programme.
Intégration terme à terme d'un développement limité.	
Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre n en un point a de I d'une application de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.	Calculer le développement limité d'une application de classe $\mathscr{C}^n$ à partir de ses dérivées successives. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §3.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Développements limités usuels.	Exploiter les développements limités usuels dans le cadre de calculs de développements limités simples. Exploiter des outils logiciels pour des développements limités plus complexes. Les étudiants doivent connaître les développements limités à tout ordre en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, exp, sin, cos, $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, arctan, ainsi que celui de tan à l'ordre 3.

b) Applications des développements limités

Aucune théorie n'est attendue dans ce paragraphe. On illustrera seulement les différents cas de figure.

Calcul de limites.	Utiliser les développements limités pour lever une forme indéterminée. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §3.
Étude locale d'une fonction.	Déterminer un prolongement par continuité, la dérivabilité en un point, la nature d'un extremum, une tangente et sa position relative locale par rapport à la courbe, grâce à un développement limité. Déterminer les éventuelles asymptotes et leurs positions relatives locales. Aucun résultat général n'est exigible.

Polynômes

L'objectif est d'étudier, par des méthodes élémentaires, les propriétés de base des polynômes, et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques. Le programme se limite au cas où les coefficients sont réels ou complexes ($\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On pourra confondre polynômes et fonctions polynomiales.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Polynômes à une indéterminée

Ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.	Aucune connaissance de la construction de $\mathbb{K}[X]$ n'est exigible. Notation $a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ ou $\sum_{p=0}^{n} a_p X^p$.
Opérations : somme, produit et composée.	
Degré d'un polynôme. Coefficient dominant, polynôme unitaire (ou normalisé). Degré d'une somme et d'un produit.	Le degré du polynôme nul vaut par convention $-\infty$. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.
Fonction polynomiale associée à un polynôme.	

b) Bases de l'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$. Diviseurs et multiples.	
Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.	Effectuer une division euclidienne de polynômes. ⇆ I

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Dérivation	
Polynôme dérivé.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit.	
Dérivées d'ordre supérieur. Formule de Leibniz. Formule de Taylor.	
d) Racines	
Racine (ou zéro) d'un polynôme.	Déterminer les racines d'un polynôme. Caractériser les racines par la divisibilité.
Multiplicité d'une racine.	
Caractérisation par les valeurs des dérivées successives en a de l'ordre de multiplicité de la racine a.	
Majoration du nombre de racines d'un polynôme non nul par son degré.	
Polynôme scindé sur $\mathbb{K}$.	
e) Décomposition en facteurs irréductibles	
Théorème de d'Alembert-Gauss.	La démonstration de ce théorème est hors programme.
Polynômes irréductibles.	
Description des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.	
Décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.	
f) Somme et produit des racines d'un polynôme	
Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients. Cas des polynômes de degré deux.	Les autres fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.

Calcul matriciel

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Matrices : opérations et propriétés	
Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.	Notation $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Matrices carrées, matrices triangulaires, matrices diagonales.	
Somme de deux matrices. Multiplication par un scalaire.	Interpréter le produit AX d'une matrice par une colonne comme une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit de deux matrices.	Interpréter la j-ième colonne du produit AB comme le produit de A par la j-ième colonne de B. Interpréter la i-ième ligne du produit AB comme le produit de la i-ième ligne de A par B.
Formule du binôme.	Calculer les puissances de certaines matrices carrées.
b) Matrice inversible	
Matrice carrée inversible. Inverse. On appelle groupe linéaire, noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices inversibles de taille n.	Caractériser l'inversibilité d'une matrice carrée A par l'existence et l'unicité de la solution de tout système de la forme $AX = B$ où X et B sont deux matrices colonnes. Caractériser l'inversibilité par le nombre de pivots. Reconnaître une matrice inversible et calculer son inverse. On admet que l'inversibilité à droite implique l'inversibilité à gauche et réciproquement. Toute théorie générale des groupes est exclue. La notion de comatrice est hors programme.
Inverse du produit de matrices inversibles.	
c) Application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à une matrice	
On peut identifier les éléments de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$ avec des matrices colonnes.	
Application $X \mapsto AX$. Linéarité.	Passer d'une écriture du type $(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$ à une écriture matricielle et réciproquement.
L'image AX est combinaison linéaire des colonnes de A.	
Image et noyau d'une matrice.	Déterminer des équations de l'image et du noyau de A. On utilise l'échelonnement d'un système pour déterminer des équations de l'image.

Espaces vectoriels et applications linéaires

Le programme se limite à l'algèbre linéaire sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. Après l'approche numérique des chapitres « Systèmes linéaires » et « Calcul matriciel », on passe à une vision plus géométrique. Les trois grands thèmes traités sont les espaces vectoriels, la théorie de la dimension finie et les applications linéaires.

Dans le sous-chapitre « A - Espaces vectoriels » on généralise les objets de la géométrie du plan et de l'espace : vecteurs, bases, droites, plans...

Le deuxième sous-chapitre « B - Espaces vectoriels de dimension finie » vise à définir la dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie et en présente plusieurs méthodes de calcul. La notion de dimension interprète le nombre de degrés de liberté pour un problème linéaire.

L'étude des applications linéaires suit naturellement celle des espaces vectoriels au sous-chapitre « C - Applications linéaires et représentations matricielles ». Son objectif est de fournir un cadre aux problèmes linéaires. Il convient de souligner, à l'aide de nombreuses figures, comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à une dimension supérieure.

Au moins deux approches pédagogiques sont possibles :
- *traiter ce chapitre selon l'ordre présenté ci-dessous, en l'illustrant notamment sur les espaces $\mathbb{K}^n$ à l'aide des techniques développées dans les chapitres « Systèmes linéaires » et « Calcul matriciel » ;*
- *mettre en place les différentes notions (sous-espaces vectoriels, familles de vecteurs, dimension, applications linéaires) dans le cas particulier des espaces $\mathbb{K}^n$ avant de les étendre aux espaces vectoriels généraux.*

Il est attendu des étudiants qu'ils sachent reconnaître une situation se prêtant à une modélisation linéaire conduisant à une représentation adaptée dans un espace bien choisi.

A - Espaces vectoriels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces et sous-espaces vectoriels	
Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Espaces vectoriels de référence : $\mathbb{K}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^\Omega$ pour Ω non vide (cas particulier des suites) et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Produit d'une famille finie de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs.	Passer du registre géométrique au registre algébrique et inversement.
Sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : définition et caractérisation. Droites et plans vectoriels.	Identifier un ensemble comme un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.
L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$. L'ensemble des solutions sur un intervalle I d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I = \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.	Appréhender le concept d'espace vectoriel de fonctions.
Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs. Intersection de sous-espaces vectoriels.	Notation $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$. Passer du registre géométrique au registre algébrique et inversement.
Somme de deux sous-espaces F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. La somme $F+G$ est dite directe si l'écriture de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.	Exploiter une relation $F \cap G = \{0\}$ pour démontrer que F et G sont en somme directe. Déterminer l'unique décomposition d'un vecteur donné dans une somme directe.
Sous-espaces supplémentaires.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Familles finies de vecteurs	
Vecteurs colinéaires. Famille libre, famille liée.	Déterminer si une famille donnée est libre ou liée.
Toute famille de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degrés échelonnés est libre. Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.	Déterminer si une famille est génératrice.
Bases. Exemples usuels : bases canoniques des espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	
Coordonnées dans une base. Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur x dans une base $\mathcal{B}$.	Déterminer les coordonnées d'un vecteur donné dans une base donnée. Notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.
Base adaptée à une somme directe. Si $(e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$ et $\mathrm{Vect}(e_{k+1},\dots,e_n)$ sont en somme directe.	

B - Espaces vectoriels de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
a) Dimension finie	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul E, on peut extraire une base de E.	Exhiber une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul de dimension finie. Application à l'existence d'une base pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie.
Théorème de la base incomplète : toute famille libre de E peut être complétée en une base. Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. Dimension. Dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si E est de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E, alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre, si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice.	On convient que l'espace $\{0_E\}$ est de dimension nulle.
b) Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie	
Si F est un sous-espace d'un espace vectoriel E de dimension finie alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. De plus, $F = E$ si et seulement si les deux dimensions sont égales.	Démontrer l'égalité de deux sous-espaces vectoriels à l'aide d'une inclusion et de l'égalité de leurs dimensions.
Supplémentaires d'un sous-espace. Existence, dimension commune.	Démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires à l'aide de la caractérisation par l'intersection nulle et la somme des dimensions.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Dimension de la somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.	Cas d'une somme directe.

c) Famille finie de vecteurs

Rang d'une famille finie $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.	Majorer le rang d'une famille de vecteurs en exhibant une relation linéaire. Le minorer en exhibant une sous-famille libre. Utiliser le rang d'une famille de vecteurs pour démontrer qu'elle est libre ou génératrice. Notation $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p)$.

C - Applications linéaires et représentations matricielles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités

Applications linéaires, endomorphismes, isomorphismes et automorphismes. Opérations sur les applications linéaires : combinaisons linéaires et composées. Règles de calcul.	Notations $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{L}(E)$.
Réciproque d'un isomorphisme, composée d'isomorphismes. Image directe, image réciproque d'un sous-espace vectoriel.	Notation $\mathrm{GL}(E)$ pour le groupe linéaire.
Image et noyau. L'image par une application linéaire u d'une famille génératrice de E est génératrice de $\mathrm{Im}(u)$.	Déterminer une base de l'image, du noyau d'une application linéaire. Caractériser l'injectivité d'une application linéaire à l'aide du noyau, la surjectivité à l'aide de l'image. Notations $\mathrm{Im}(u)$, $\mathrm{Ker}(u)$.

b) Isomorphismes

Une application linéaire de E dans F est un isomorphisme si et seulement si elle transforme une (toute) base de E en une base de F. Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension.	
Si E et F ont même dimension finie alors une application linéaire de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective ou surjective.	Cas particulier des endomorphismes. Contre-exemples en dimension infinie.

c) Modes de définition d'une application linéaire

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Une application linéaire définie sur $E = E_1 \oplus E_2$ est déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.	

d) Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

Identité, homothéties.	Notation Id_E.

Contenus	Capacités & Commentaires
Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires.	Démontrer qu'un endomorphisme donné est un projecteur à l'aide de la caractérisation $p \circ p = p$. Démontrer qu'un endomorphisme donné est une symétrie à l'aide de la caractérisation $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

e) Rang d'une application linéaire

Application linéaire de rang fini. Rang d'une composée : $$\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min\big(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)\big)$$	
Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.	
Théorème du rang : si E est de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E,F)$ alors u est de rang fini et $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$.	La démonstration est hors programme.

f) Équations linéaires

Une équation, d'inconnue $x \in E$, est dite linéaire si elle est de la forme $u(x) = b$ où $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $b \in F$. Structure des solutions, condition de compatibilité, lien avec $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.	Exemples des systèmes linéaires et des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2. La notion de sous-espace affine est hors programme.

g) Représentation matricielle en dimension finie

Matrice d'une application linéaire u dans un couple de bases.	Passer du registre vectoriel au registre matriciel pour exprimer les coordonnées de $u(x)$ en fonction de celles de x. Déterminer la matrice, dans une base adaptée, d'un projecteur et d'une symétrie. Notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, où $\mathscr{B}$ est une base de l'espace de départ et $\mathscr{C}$ une base de l'espace d'arrivée. Notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ dans le cas où $\mathscr{B} = \mathscr{C}$.
Un couple de bases étant fixé, isomorphisme $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$. Application au calcul de la dimension de $\mathscr{L}(E,F)$. Matrice d'une composée. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Matrice de passage d'une base à une autre. Effet d'un changement de bases sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme. Matrices semblables.	Déterminer la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, après un changement de base(s). Choisir une base adaptée à un problème donné. L'objectif est de donner une première approche de notions qui seront approfondies en seconde année. La diagonalisation des endomorphismes est hors programme.

h) Rang d'une matrice

Rang d'une matrice A, pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	Faire le lien entre divers aspects de la notion de rang. Le rang de A est défini comme le rang de ses vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^n$ ou, de manière équivalente, comme le rang de l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associée. On admet que le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs lignes.
Le rang d'une matrice A est égal au rang du système $AX = 0$.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de sa matrice dans une base. Le rang d'une application linéaire est égal au rang de sa matrice dans un couple de bases.	Calculer le rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire par la méthode du pivot. Pour le calcul à la main, on se limite à des cas simples ⇆ I.
Caractérisation des matrices inversibles à l'aide du rang. Conservation du rang par multiplication à droite ou à gauche par une matrice inversible.	

Probabilités sur un univers fini

Ce chapitre a pour objectifs de mettre en place un cadre théorique permettant de fonder l'étude des probabilités dans le cas d'un univers fini et de développer la formation des étudiants au raisonnement probabiliste. On enrichit le point de vue fréquentiste étudié au lycée par une formalisation ensembliste. On mettra l'accent sur des exemples issus de la vie courante ou provenant des autres disciplines.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces probabilisés finis	
Expérience aléatoire. L'ensemble des issues (ou résultats possibles, ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers.	Modéliser des situations aléatoires. On se limite au cas où l'univers Ω est fini.
Événement, événement élémentaire (singleton). Événement certain, événement impossible, événement contraire, événements incompatibles. Opérations sur les événements. Système complet d'événements.	Maîtriser le lien entre point de vue ensembliste et point de vue probabiliste. On se limite au cas où l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de Ω. Notation $\overline{A}$ pour l'événement contraire.
On appelle probabilité sur un univers fini Ω toute application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant $P(\Omega)=1$ et, pour tout couple (A,B) de parties disjointes de Ω, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.	Expliciter l'espace probabilisé modélisant une situation aléatoire décrite en langage naturel.
Un espace probabilisé fini est un couple (Ω,P) ou Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω. Probabilité de l'union de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance d'une probabilité.	
Si $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ et $p_1,\dots,p_n$ sont des réels positifs de somme 1, il existe une et une seule probabilité P sur Ω telle que : $\forall i\in[\![1,n]\!],\ P(\{\omega_i\})=p_i$	Calculer la probabilité d'un événement à partir d'un tableau de probabilités. Choisir les valeurs des p_i revient à choisir un modèle probabiliste.
Équiprobabilité (ou probabilité uniforme).	
b) Indépendance et conditionnement	
Si A et B sont deux événements tels que $P(B)>0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. On la note aussi $P(A\mid B)$. Formules des probabilités composées, des probabilités totales.	Illustrer une expérience aléatoire à l'aide d'arbres de probabilités. La définition de $P_B(A)$ est justifiée par une approche heuristique fréquentiste. L'application P_B est une probabilité.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Formules de Bayes : – si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors $$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B)}$$ – si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle, alors $$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j)\, P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)\, P(A_i)}$$	On donnera plusieurs applications issues de la vie courante.
Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P(A \mid B) = P(A)$.
Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.	L'indépendance des événements A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.

Variables aléatoires réelles sur un univers fini

La notion de variable aléatoire modélise le résultat d'une expérience aléatoire. L'utilisation des variables aléatoires pour modéliser des situations simples dépendant du hasard fait partie des capacités attendues des étudiants. On se limite aux variables aléatoires réelles définies sur un univers fini.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Variable aléatoire	
Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.	Modéliser des situations données en langage naturel à l'aide de variables aléatoires. Si X est une variable aléatoire et si A est une partie de E, notation $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ pour l'événement $X^{-1}(A)$. Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$, $P(X \leqslant x)$.
Loi de probabilité P_X et fonction de répartition.	Déterminer la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition. L'application P_X est définie par la donnée des $P(X = x)$ pour x dans $X(\Omega)$. La connaissance des propriétés générales des fonctions de répartition n'est pas exigible.
Image d'une variable aléatoire par une application.	
b) Espérance	
Définition de l'espérance d'une variable aléatoire. Variable centrée. Relation : $\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega)$.	Interpréter l'espérance en terme de moyenne pondérée. ⇆ PC SI : centre de gravité.
Théorème de transfert : si X est une variable aléatoire réelle à valeurs finies et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors l'espérance de la variable aléatoire $\varphi(X)$ est donnée par la formule $\mathrm{E}(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) P(X = x)$.	Calculer une espérance à l'aide de la formule du transfert.
En particulier, $\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$ pour a et b deux réels donnés.	On admet de manière plus générale la linéarité de l'espérance.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Variance et écart type d'une variable aléatoire	
Variance et écart type d'une variable aléatoire. Variable réduite.	Interpréter la variance comme indicateur de dispersion. Les moments d'ordre supérieur ne sont pas au programme.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$ (Kœnig-Huygens).	⇆ PC SI : moments d'inertie.
$\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$ pour a et b deux réels donnés.	
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Interpréter la variance comme un indicateur de dispersion. L'inégalité de Markov n'est pas au programme.
d) Lois usuelles	
Loi certaine.	
Loi uniforme.	Reconnaître des situations modélisables par une loi uniforme.
Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.	Reconnaître des situations modélisables par une loi de Bernoulli. Notation $\mathscr{B}(p)$.
Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.	Reconnaître des situations modélisables par une loi binomiale. Notation $\mathscr{B}(n, p)$.
Espérance et variance associées à ces différentes lois.	

Appendice aux programmes de physique-chimie et de sciences industrielles de l'ingénieur de TSI « Outils mathématiques »

Au niveau des classes préparatoires, le rôle structurant des outils fournis par les mathématiques est incontournable en physique-chimie et en sciences industrielles de l'ingénieur, mais il convient d'éviter les dérives formelles ou calculatoires : le recours au calcul analytique doit être limité aux cas les plus simples et on utilisera des outils de calcul numérique ou formel dans tous les autres cas, y compris dans certains cas où des calculs analytiques seraient a priori possibles mais hors de portée des étudiants du fait de leur longueur ou de leur technicité.

Afin de cibler au mieux la formation et l'évaluation, cet appendice liste les outils mathématiques dont une bonne maîtrise est indispensable pour que les objectifs de formation des programmes de physique-chimie et de sciences industrielles de l'ingénieur puissent être pleinement atteints. Le niveau d'exigence requis est systématiquement précisé pour chaque outil afin d'éviter toute dérive.

L'apprentissage de ces outils doit être réparti sur l'année en fonction de l'avancement des cours en ayant un souci permanent de contextualisation. Ceci suppose notamment une concertation au sein de l'équipe pédagogique.

Dans le cas où d'autres outils seraient ponctuellement nécessaires, il conviendrait de les mettre à disposition des étudiants sous une forme opérationnelle (formulaires…) et de faire en sorte que leur manipulation ne puisse pas constituer un obstacle.

OUTILS	NIVEAU D'EXIGENCE
1. Equations algébriques	
Système linéaire de n équations à p inconnues	Identifier un nombre minimal d'inconnues, confronter au nombre d'équations indépendantes disponibles. Exprimer la dépendance dans le seul cas n = p = 2. Résoudre analytiquement dans le seul cas n = p = 2. Utiliser des outils numériques ou formels dans les autres cas. *Exemples : systèmes d'ordre 3 : n = p = 3 en mécanique (statique du solide).*
Équation non linéaire	Discuter graphiquement dans le cas où l'équation se présente sous la forme f(x) = g(x) de l'égalité de deux fonctions f et g classiques. Résoudre, dans le cas général, à l'aide d'un outil numérique. *Exemples : point de fonctionnement d'un actionneur associé à sa charge, d'un générateur associé à sa charge.*

OUTILS	NIVEAU D'EXIGENCE
2. Equations différentielles	
Équation différentielle linéaire du premier et du second ordre à coefficients constants	Identifier l'ordre, expliciter les conditions initiales. Exploiter l'équation caractéristique. Prévoir le caractère borné ou non des solutions de l'équation homogène (critère de stabilité). Mettre une équation sous forme canonique. L'écriture de l'équation différentielle doit permettre la vérification de l'homogénéité des grandeurs physiques. Tracer numériquement l'allure du graphe des solutions en tenant compte des conditions initiales (CI). Résoudre analytiquement (solution complète) dans le seul cas d'une équation du premier ordre et d'un second membre constant. Obtenir analytiquement (notation complexe) le seul régime sinusoïdal forcé dans le cas d'un second membre sinusoïdal. Mettre en évidence l'intérêt d'utiliser la notation complexe dans le cas d'un régime forcé sinusoïdal. Déterminer le module et la phase des grandeurs. Mettre en évidence les notions de régime libre, régime permanent, régime forcé et régime transitoire. *Exemples : électrocinétique, mécanique, thermique…*
Équation quelconque	Intégrer numériquement avec un outil fourni. *Exemples : équations issues du principe fondamental de la dynamique.*

OUTILS	NIVEAU D'EXIGENCE
3. Fonctions	
Fonctions usuelles	Exponentielle, logarithme népérien et décimal, cosinus, sinus, tangente, $x \to x^2$, $x \to \frac{1}{x}$, $x \to \sqrt{x}$.
Dérivée	Interpréter géométriquement la dérivée. Dériver une fonction composée. Rechercher un extrémum. *Exemples : phénomène de résonance, couple maximum d'une machine asynchrone.*
Primitive et intégrale Valeurs moyenne et efficace	Interpréter l'intégrale comme une somme de contributions infinitésimales. Exprimer la valeur moyenne sous forme d'une intégrale. Connaître la valeur moyenne sur une période des fonctions cos, sin, $\cos^2$ et $\sin^2$. Interpréter l'intégrale en termes d'aire algébrique pour des fonctions périodiques simples. *Exemples : fonctions périodiques constantes par morceaux pour les convertisseurs statiques.*
Représentation graphique d'une fonction	Utiliser un grapheur pour tracer une courbe d'équation donnée. Déterminer un comportement asymptotique ; rechercher un extremum. Utiliser des échelles logarithmiques ; identifier une loi de puissance en échelle log-log. *Exemples : réponses fréquentielles (diagramme de Bode).*
Développements limités	Connaître et utiliser la formule de Taylor à l'ordre un ou deux ; interpréter graphiquement. Connaître et utiliser les développements limités usuels au voisinage de 0 jusqu'au premier ordre non nul : $(1+x)^{\alpha}$, exponentielle, sinus, cosinus, logarithme népérien.
Développement en série de Fourier d'une fonction périodique	Utiliser un développement en série de Fourier fourni via un formulaire. Mettre en évidence les propriétés de symétrie dans le domaine temporel (demi-période).

OUTILS	NIVEAU D’EXIGENCE
4. Géométrie	
Vecteurs et systèmes de coordonnées	Exprimer algébriquement les coordonnées d’un vecteur. Utiliser les systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques. *Exemple : repérage d’un point dans l’espace en cinématique.*
Projection d'un vecteur et produit scalaire	Interpréter géométriquement le produit scalaire et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée. Utiliser la bilinéarité et le caractère symétrique du produit scalaire. *Exemples : projection en mécanique dans un repère, diagramme de Fresnel.*
Produit vectoriel	Interpréter géométriquement le produit vectoriel et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée directe. Utiliser la bilinéarité et le caractère antisymétrique du produit vectoriel. Faire le lien avec l’orientation des trièdres. *Exemples : calcul des moments, dérivation des vecteurs unitaires.*
Transformations géométriques	Utiliser les symétries par rapport à un plan, les translations et les rotations. Connaître leur effet sur l’orientation de l’espace.
Courbes planes Courbes planes paramétrées	Reconnaître l’équation cartésienne d’une droite et d’un cercle. Utiliser la représentation polaire d’une courbe plane ; utiliser un grapheur pour obtenir son tracé ; interpréter l’existence de points limites ou d’asymptotes à partir de l’équation r=f(θ). Reconnaître les équations paramétriques $x = a\cdot\cos(\omega\cdot t)$ *et* $y = a\cdot\sin(\omega\cdot t - \varphi)$ d’une ellipse et la tracer dans les cas particuliers : $\varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$ *et* $\varphi = \pi$. Tracer une courbe paramétrée à l’aide d’un grapheur.
Longueurs, aires et volumes classiques	Connaître les expressions du périmètre du cercle, de l’aire du disque, de l’aire d’une sphère, du volume d’une boule, du volume d’un cylindre.
Barycentre d'un système de points	Connaître la définition du barycentre. Utiliser son associativité. Exploiter les symétries pour prévoir la position du barycentre d’un système homogène. *Exemple : recherche d’un centre de gravité d’un solide.*

OUTILS	NIVEAU D'EXIGENCE
5. Trigonométrie	
Angle orienté	Définir une convention d'orientation des angles dans un plan et lire des angles orientés. Relier l'orientation d'un axe de rotation à l'orientation positive des angles de rotation autour de cet axe.
Fonctions cosinus, sinus et tangente	Utiliser le cercle trigonométrique et l'interprétation géométrique des fonctions trigonométriques cosinus, sinus et tangente comme aide-mémoire : relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, relations entre fonctions trigonométriques, parités, valeurs des fonctions pour les angles usuels. Connaître les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus ; utiliser un formulaire dans les autres cas. Passer de la forme $A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$ à la forme $C \cdot \cos(\omega t - \varphi)$
Nombres complexes et représentation dans le plan. Somme et produit de nombres complexes	Calculer et interpréter géométriquement la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument d'un nombre complexe. *Exemples : diagramme de Fresnel. Application aux systèmes triphasés :* $\underline{a} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$
Calcul matriciel (en SII uniquement)	Effectuer le produit d'une matrice par un vecteur *Exemple : calcul du moment dynamique.* Choisir une base pour simplifier la structure d'une matrice. *Exemple : simplification d'une matrice d'inertie.*