CHAPITRE 7
Probabilités sur un univers fini

Exercice 1 :

1. On a 52 tirages différents possibles.
2. On se trouve dans une situation d'équiprobabilité, donc il suffit de compter le nombre de cas favorable. Or il y a 4 rois, donc la probabilité est $4/52$.
3. Il y a 13 cœurs, donc la probabilité est $13/52$.
4. Cela revient à tirer le roi de cœur, donc la probabilité est $1/52$.
5. On note R l'évènement tiré un roi et C l'évènement tiré un cœur. On a
$$P(R \cup C) = P(R) + P(C) - P(R \cap C) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}.$$
6. On se trouve à nouveau dans une situation d'équiprobabilité, mais le nombre de tirages différents est
$$\binom{52}{2} = \frac{52 \times 51}{2} = 1326.$$
On note R l'évènement avoir au moins un roi dans sa main. Il est plus simple de calculer la probabilité de l'évènement contraire. On a
$$P(R) = 1 - P(\bar{R}) = 1 - \frac{\binom{48}{2}}{1326} = \frac{198}{1326}.$$
On note C l'évènement avoir au moins un cœur dans sa main. Il est plus simple de calculer la probabilité de l'évènement contraire. On a
$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{\binom{39}{2}}{1326} = \frac{585}{1326}.$$
On distingue le cas où on a le roi de cœur dans la main du cas où on ne l'a pas. On obtient
$$P(R \cap C) = \frac{\binom{1}{1}\binom{51}{1} + \binom{3}{1}\binom{12}{1}}{1326} = \frac{87}{1326}.$$
Pour terminer, on utilise comme avant
$$P(R \cup C) = P(R) + P(C) - P(R \cap C) = \frac{198 + 585 - 87}{1326} = \frac{696}{1326}.$$

Exercice 2 : Notons S l'évènement « obtenir un 6 en lançant 4 fois un dé » et S_k l'évènement « obtenir un six au k-ième lancer ». On a
$$\begin{aligned} P(S) &= 1 - P(\overline{S}) = 1 - P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap \overline{S}_3 \cap \overline{S}_4) \\ &= 1 - P(\overline{S}_1)P(\overline{S}_2)P(\overline{S}_3)P(\overline{S}_4) = 1 - (5/6)^4 \approx 0,52. \end{aligned}$$
De même, en notant D l'évènement « obtenir un double 6 en lançant 24 fois une paire », on obtient avec un calcul analogue
$$P(D) = 1 - (35/36)^{24} \approx 0,49.$$
On conclut qu'il est plus probable d'obtenir un six en lançant 4 fois un dé que d'obtenir un double six en lançant 24 fois une paire de dés

Exercice 3 : Notons T l'évènement « le dé tiré est truqué » et S l'évènement « le résultat du dé est 6 ». On a avec la formule des probabilités totales
$$P(S) = P(S \mid T)P(T) + P(S \mid \overline{T})P(\overline{T}) = \frac{1}{2} \times \frac{25}{100} + \frac{1}{6} \times \frac{75}{100} = \frac{1}{4}.$$
On en déduit avec la formule de Bayes que
$$P(T \mid S) = \frac{P(S \mid T)P(T)}{P(S)} = \frac{1}{2} \times \frac{25}{100} \times \frac{4}{1} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4 : Pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, notons B_i l'évènement « la i-ième boule tirée est blanche ». On utilise la formule des probabilités composées
$$P(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3) = P(B_1)P(\overline{B_2} \mid B_1)P(B_3 \mid B_1 \cap \overline{B_2}) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{60}{504}.$$

Exercice 5 :

1. Notons A_i l'évènement « on tire une boule blanche et une boule rouge au i-ième tirage ». On utilise la formule des probabilités composées

$$p_n = P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Lors du premier tirage, on se trouve dans une situation d'équiprobabilité. Le nombre d'issues total est $\binom{2n}{2}$, tandis qu'il y a $\binom{n}{1}^2$ issues dans A_1. En itérant, on trouve

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{\binom{n}{1}^2}{\binom{2n}{2}} \times \frac{\binom{n-1}{1}^2}{\binom{2(n-1)}{2}} \times \cdots \times \frac{\binom{1}{1}^2}{\binom{2}{2}} \\ &= \frac{2n^2}{2n(2n-1)} \times \frac{2(n-1)^2}{(2n-2)(2n-3)} \times \cdots \times \frac{2 \times 1^2}{2} \\ &= \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}. \end{aligned}$$

2. On remarque que

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2},$$

donc d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum p_n$ converge, donc la suite (p_n) converge vers 0. C'est intuitif : si le nombre de boules est très grand, il est très peu probable de tirer à chaque fois une boule blanche et une boule rouge.

Exercice 6 : On désigne par B_k l'évènement « la k-ième boule tirée est blanche » et N_k l'évènement « la k-ième boule tirée est noire ».

1. En notant N l'évènement « tirer au moins une boule noire », on a avec la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned} P(N) &= 1 - P(\overline{N}) = 1 - P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) \\ &= 1 - P(B_1)P(B_2 \mid B_1)P(B_3 \mid B_1 \cap B_2) \\ &= 1 - \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

2. Avec la définition, on a

$$P(N_1 \mid N) = \frac{P(N \cap N_1)}{P(N)} = \frac{P(N_1)}{P(N)} = \frac{2}{10} \cdot \frac{15}{8} = \frac{3}{8}.$$

Exercice 7 :

1. Notons B l'évènement « on a tiré une boule blanche » et A_i l'évènement « on a transféré i boules blanches de l'urne B dans l'urne A ». On a

$$P(A_0) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{28}{66}, \quad P(A_1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{32}{66}, \quad P(A_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{6}{66}.$$

On utilise la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \mid A_0)P(A_0) + P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) \\ &= \frac{6}{13} \times \frac{28}{66} + \frac{7}{13} \times \frac{32}{66} + \frac{8}{13} \times \frac{6}{66} \\ &= \frac{440}{858} = \frac{20}{39} \approx 51{,}28\%. \end{aligned}$$

2. On utilise la formule de Bayes

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \mid B) &= P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) \\ &= \frac{P(B \mid A_1)P(A_1)}{P(B)} + \frac{P(B \mid A_2)P(A_2)}{P(B)} \\ &= \frac{858}{440} \times \frac{7}{13} \times \frac{32}{66} + \frac{858}{440} \times \frac{8}{13} \times \frac{6}{66} \\ &= \frac{272}{440} = \frac{34}{55} \approx 61{,}82\%. \end{aligned}$$

Exercice 8 :

1. Notons M l'évènement « la personne est malade » et T l'évènement « le test est positif ». Par la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \mid M)P(M) + P(T \mid \bar{M})P(\bar{M}) \\ &= 0{,}99 \times 10^{-4} + 10^{-3} \times (1 - 10^{-4}), \end{aligned}$$

puis avec la formule de Bayes

$$P(M \mid \bar{T}) = \frac{P(\bar{T} \mid M)P(M)}{P(\bar{T})} = \frac{0,01 \times 10^{-4}}{1 - P(T)} \approx 10^{-6}.$$

2. On utilise la formule de Bayes

$$P(M \mid T) = \frac{P(T \mid M)P(M)}{P(T)} = \frac{0,99 \times 10^{-4}}{P(T)} \approx 9,01\%.$$

Exercice 9 :

1. Notons D l'évènement « le produit est défectueux » et C l'évènement « l'article passe le contrôle ». La probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle est

$$\begin{aligned} P((D \cap C) \cup (\bar{D} \cap \bar{C})) &= P(D \cap C) + P(\bar{D} \cap \bar{C}) \\ &= P(C \mid D)P(D) + P(\bar{C} \mid \bar{D})P(\bar{D}) \\ &= 0,05 \times 0,01 + 0,02 \times 0,99 = 2,03\%. \end{aligned}$$

2. Par la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \mid D)P(D) + P(C \mid \bar{D})P(\bar{D}) \\ &= 0,05 \times 0,01 + 0,98 \times 0,99 = 97,07\%. \end{aligned}$$

On utilise la formule de Bayes

$$P(D \mid C) = \frac{P(C \mid D)P(D)}{P(C)} = \frac{0,05 \times 0,01}{0,9707} \approx 0,052\%.$$

Exercice 10 :

1. Notons A_n l'évènement « le professeur oublie ses clés le n-ième jour ». On a alors

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_{n+1} \mid A_n)P(A_n) + P(A_{n+1} \mid \bar{A}_n)P(\bar{A}_n) \\ &= \frac{1}{10} \times p_n + \frac{4}{10} \times (1 - p_n) \\ &= \frac{2}{5} - \frac{3}{10} p_n. \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_{n+1} = p_{n+1} - \frac{4}{13} = -\frac{3}{10} p_n + \frac{2}{5} - \frac{4}{13} = -\frac{3}{10} p_n + \frac{6}{65} = -\frac{3}{10}\left(p_n - \frac{4}{13}\right) - \frac{3}{10} a_n,$$

d'où le résultat.

3. Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \frac{4}{13} + a_n = \frac{4}{13} + \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{4}{13}\right).$$

4. La limite de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est $4/13$. Lorsque n est grand, la probabilité que le professeur oublie ses clés le n-ième jour est d'environ $4/13$.

Exercice 11 :

1. Notons A_n l'évènement « la n-ième personne à la même information qu'au départ ». On a alors

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_{n+1} \mid A_n)P(A_n) + P(A_{n+1} \mid \bar{A}_n)P(\bar{A}_n) \\ &= p \times p_n + (1 - p) \times (1 - p_n) \\ &= (2p - 1)p_n + (1 - p). \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p - 1)p_n + (1 - p) - \frac{1}{2} = (2p - 1)p_n - \frac{2p - 1}{2} = (2p - 1)a_n,$$

d'où le résultat.

3. Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \frac{1}{2} + a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p - 1)^n.$$

4. La limite de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $1/2$. Lorsque n est grand, on n'a plus aucune indication permettant de savoir si la n-ième personne dispose de l'information initiale ou non.

Exercice 12 :

1. On a $D(\Omega) = [\![-3,3]\!]$ et en utilisant du dénombrement, on obtient que la loi de la variable aléatoire D est donné par le tableau suivant.

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P(D=k)$	$1/16$	$2/16$	$3/16$	$4/16$	$3/16$	$2/16$	$1/16$

2. Comme X et Y ont la même loi, on a par linéarité de l'espérance que
$$\mathrm{E}(D) = \mathrm{E}(X-Y) = \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X) = 0.$$

3. Comme $\mathrm{E}(D) = 0$, on obtient avec le théorème du transfert que
$$\begin{aligned}\mathrm{V}(D) = \mathrm{E}\left(D^2\right) &= \sum_{k=-3}^{3} k^2 P(D=k)\\ &= 9\times\frac{1}{16} + 4\times\frac{2}{16} + 1\times\frac{3}{16} + 0\times\frac{4}{16} + 1\times\frac{3}{16} + 4\times\frac{2}{16} + 9\times\frac{1}{16}\\ &= \frac{40}{16} = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 13 :

1. Par hypothèse, il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier $k \in [\![1,6]\!]$, on a $P(X=k) = ak$. Or on a la relation
$$\sum_{k=1}^{6} P(X=k) = 1 \Leftrightarrow 21a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{21}.$$
Ainsi, la loi de X est donnée par
$$\forall k \in [\![1,6]\!], \quad P(X=k) = \frac{k}{21}.$$

2. Avec le théorème du transfert, on a
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X=k) = \frac{91}{21}, \quad \mathrm{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(X=k) = 21,$$
donc
$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 21 - \left(\frac{91}{21}\right)^2 = \frac{980}{441} = \frac{20}{9}.$$

3. Avec le théorème du transfert, on a
$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k} P(X=k) = \frac{6}{21}.$$

Exercice 14 :

1. Notons A_i l'évènement « la i-ième personne réussit le test ». La variable aléatoire X prends ses valeurs dans $[\![1,n+1]\!]$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a par indépendance
$$\begin{aligned}P(X=k) &= P(\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_{k-1} \cap A_k)\\ &= P(\bar{A}_1)\cdots P(\bar{A}_{k-1})P(A_k) = (1-p)^{k-1}p,\end{aligned}$$
tandis que
$$\begin{aligned}P(X=n+1) &= P(\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_n)\\ &= P(\bar{A}_1)\cdots P(\bar{A}_n) = (1-p)^n.\end{aligned}$$

2. Par définition, on a
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n+1} kP(X=k) = p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} + (n+1)(1-p)^n.$$
La somme dans l'expression de droite est l'image en $1-p$ de la dérivée de la fonction
$$x \mapsto \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$
On en déduit que
$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= p\frac{-(n+1)(1-p)^n p + (1-(1-p)^{n+1})}{p^2} + (n+1)(1-p)^n\\ &= \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p}.\end{aligned}$$

3. Recruter un candidat est l'évènement $(X \leqslant n)$, donc

$$P(X \leqslant n) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow (1-p)^n \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow p \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}.$$

Exercice 15 : En partant de la somme de droite, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} P(X>n) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=n+1}^{N} P(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=0}^{k-1} P(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} kP(X=k) = E(X).\end{aligned}$$

Exercice 16 :

1. On donne la loi du couple (X, Y) à l'aide d'un tableau. La variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3, tandis que N prend les valeurs 0,1 et 2. Comme on est dans une situation d'équiprobabilité, on compte le nombre de cas favorable. Le nombre de cas totale est $3^3 = 27$.

$P((X=x \cap N=n))$	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$P(X=x)$
$x=0$	0	6/27	2/27	8/27
$x=1$	6/27	6/27	0	12/27
$x=2$	0	6/27	0	6/27
$x=3$	0	0	1/27	1/27
$P(N=n)$	6/27	18/27	3/27	

2. On déduit les lois de X et de N à partir de la loi du couple (X, Y) dans le tableau ci-dessus.

3. On remarque que X suit une loi binomiale de paramètre $n=3$ et $p=1/3$. Ainsi, on a $\mathrm{E}(X)=1$ et $\mathrm{V}(X)=2/3$. Pour N, on applique la définition

$$\begin{aligned}E(N) &= 0 \times \frac{6}{27} + 1 \times \frac{18}{27} + 2 \times \frac{3}{27} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}, \\ E(N^2) &= 0^2 \times \frac{6}{27} + 1^2 \times \frac{18}{27} + 2^2 \times \frac{3}{27} = \frac{30}{27} = \frac{10}{9}, \\ \mathrm{V}(N) &= \mathrm{E}(N^2) - \mathrm{E}(N)^2 = \frac{10}{9} - \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{26}{81}.\end{aligned}$$

4. Les variables aléatoires X et N ne sont pas indépendantes, car

$$P((X=3) \cap (N=0)) = 0 \neq P(X=3)P(N=0).$$

Exercice 17 :

1. On donne la loi du couple (U,V) à l'aide d'un tableau. Les variables aléatoires U et V prennent les valeurs 1, 2, 3 et 4. Comme on est dans une situation d'équiprobabilité, on compte le nombre de cas favorable. Le nombre de cas totale est $4^2 = 16$.

$P((U=u)\cap(V=v))$	$u=1$	$u=2$	$u=3$	$u=4$	$P(V=v)$
$v=1$	1/16	0	0	0	1/16
$v=2$	2/16	1/16	0	0	3/16
$v=3$	2/16	2/16	1/16	0	5/16
$v=4$	2/16	2/16	2/16	1/16	7/16
$P(U=u)$	7/16	5/16	3/16	1/16	

2. Pour l'espérance, on utilise la définition

$$\mathrm{E}(U) = 1\times\frac{7}{16}+2\times\frac{5}{16}+3\times\frac{3}{16}+4\times\frac{1}{16} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8},$$
$$\mathrm{E}(V) = 1\times\frac{1}{16}+2\times\frac{3}{16}+3\times\frac{5}{16}+4\times\frac{7}{16} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}.$$

3. Les variables aléatoires U et V ne sont pas indépendantes, car

$$P((U=4)\cap(V=1)) = 0 \neq P(U=4)P(V=1).$$

Exercice 18 :

1. On a
$$P(X\leqslant k) = \sum_{i=1}^{k} P(X=i) = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

2. En utilisant la formule des probabilités totales, puis l'indépendance des variables aléatoires X et Y, on obtient
$$\begin{aligned}P(X=Y) &= \sum_{k=1}^{n} P((X=Y)\cap(Y=k)) = \sum_{k=1}^{n} P((X=k)\cap(Y=k))\\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X=k)P(Y=k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{1}{n} = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$
De même, on a
$$\begin{aligned}P(X\leqslant Y) &= \sum_{k=1}^{n} P((X\leqslant Y)\cap(Y=k)) = \sum_{k=1}^{n} P((X\leqslant k)\cap(Y=k))\\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X\leqslant k)P(Y=k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\times\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$
Pour finir, on a
$$P(X\neq Y) = 1-P(X=Y) = 1-\frac{1}{n}.$$

3. Par définition du maximum et par indépendance de X et Y, on a
$$P(M\leqslant k) = P((X\leqslant k)\cap(Y\leqslant k)) = P(X\leqslant k)P(Y\leqslant k) = \frac{k^2}{n^2}.$$

4. La variable aléatoire M prend ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$. En utilisant le résultat de la question précédente (qui est aussi valable pour $k=0$), on a pour tout élément $k\in[\![1,n]\!]$ que
$$P(M=k) = P(M\leqslant k)-P(M\leqslant k-1) = \frac{k^2}{n^2}-\frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

Exercice 19 :

1. La variable aléatoire S prend ses valeurs dans $[\![2,2n]\!]$. On utilise la formule des probabilités totales pour $k \in [\![2,2n]\!]$, puis l'indépendance des variables aléatoires X et Y

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{\ell=1}^{n} P((X+Y=k)\cap(Y=\ell)) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} P((X=k-\ell)\cap(Y=\ell)) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} P(X=k-\ell)P(Y=\ell). \end{aligned}$$

Si $2 \leqslant k \leqslant n$, on obtient

$$P(S=k) = \sum_{\ell=1}^{k-1} P(X=k-\ell)P(Y=\ell) = \sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{1}{n}\times\frac{1}{n} = \frac{k-1}{n^2},$$

tandis que si $n+1 \leqslant k \leqslant 2n$, on obtient

$$P(S=k) = \sum_{\ell=k-n}^{n} P(X=k-\ell)P(Y=\ell) = \sum_{\ell=k-n}^{n} \frac{1}{n}\times\frac{1}{n} = \frac{2n-k+1}{n^2}.$$

2. Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y) = 2\mathrm{E}(X) = 2\frac{(n+1)}{2} = (n+1).$$

De plus, comme X et Y sont indépendantes, on a

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \frac{n+1}{2}\times\frac{n+1}{2} = \frac{(n+1)^2}{4}.$$

3. Les variables aléatoires X et S ne sont pas indépendantes, car

$$P((X=1)\cap(S=2n)) = 0 \neq P(X=1)P(S=2n).$$

Exercice 20 :

1. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P((X=i)\cap(Y=j)) = 1 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} aij = 1 \\ &\Leftrightarrow a\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow a = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{-2}. \end{aligned}$$

2. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a avec la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{j=1}^{n} P((X=k)\cap(Y=j)) = \sum_{j=1}^{n} akj \\ &= ak\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Pour l'espérance, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{2}{n(n+1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}. \end{aligned}$$

3. La loi de Y est la même que celle de X. On en déduit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes car

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad P((X=i)\cap(Y=j)) = aij = P(X=i)P(Y=j).$$

4. Avec la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= \sum_{k=1}^{n} P((X=Y)\cap(Y=k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P((X=k)\cap(Y=k)) \\ &= a\sum_{k=1}^{n} k^2 = a\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}. \end{aligned}$$

5. La variable aléatoire M prend ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a
$$P(M \leqslant k) = P((X \leqslant k) \cap (Y \leqslant k)) = P(X \leqslant k)P(Y \leqslant k).$$
Or, on a
$$P(X \leqslant k) = P(Y \leqslant k) = \sum_{i=1}^{k} P(X=i) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{n(n+1)},$$
donc
$$P(M \leqslant k) = \left(\frac{k(k+1)}{n(n+1)}\right)^2.$$
Finalement,
$$\begin{aligned} P(M=k) &= P(M \leqslant k) - P(M \leqslant k-1) \\ &= \left(\frac{k(k+1)}{n(n+1)}\right)^2 - \left(\frac{(k-1)k}{n(n+1)}\right)^2 = \frac{4k^3}{[n(n+1)]^2}. \end{aligned}$$

Exercice 21 :

1. Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $j \leqslant i$, on a
$$P((X=i) \cap (Y=j)) = P(Y=j \mid X=i)P(X=i) = \frac{1}{i} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{ni}.$$
2. La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Si $k \in [\![1,n]\!]$, on a par la formule des probabilités totales
$$P(Y=k) = \sum_{i=1}^{n} P((X=i) \cap (Y=k)) = \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}.$$
3. Comme X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, on a $E(X) = (n+1)/2$. Pour la variable aléatoire Y, on a
$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{k}{ni} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} \frac{k}{ni} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2ni} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (i+1) = \frac{n(n+3)}{4n} = \frac{n+3}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 22 :

1. D'après le cours, S_n suit une loi binomiale de paramètre n et p.
2. On a
$$\mathrm{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathrm{E}(S_n) = p, \quad \mathrm{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{V}(S_n) = \frac{p(1-p)}{n}.$$
3. Avec l'inégalité $4p(1-p) \leqslant 1$ et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{V}(S_n)}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$
4. On pose $\varepsilon = 0,05$. On souhaite que
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 0,95.$$
Il suffit de choisir n tel que
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2} \leqslant 0,05.$$
En résolvant l'inéquation, on trouve $n = 2000$.

Exercice 23 :

1. Pour $k \in [\![1,N]\!]$, on a par indépendance mutuelle de $X_1, \dots, X_n$
$$\begin{aligned} P(M_n \leqslant k) &= P((X_1 \leqslant k) \cap \cdots \cap (X_n \leqslant k)) \\ &= P(X_1 \leqslant k) \cdots P(X_n \leqslant k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n. \end{aligned}$$
On en déduit que
$$P(M_n = k) = P(M_n \leqslant k) - P(M_n \leqslant k-1) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n.$$
2. En utilisant l'expression ci-dessus, on obtient
$$P(M_n = N) = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$
Le résultat est intuitif. Si on simule un très grand nombre de loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$, on est quasi-certain que le maximum des résultats sera N.

Exercice 24 :

1. On donne la loi du couple (X,Y) sous forme d'un tableau. La variable aléatoire Y prend les valeurs 0, 1 et 4.

$P((X=x)\cap(Y=y))$	$y=0$	$y=1$	$y=4$	$P(X=x)$
$x=-2$	0	0	$1/4$	$1/4$
$x=-1$	0	$1/8$	0	$1/8$
$x=0$	$1/4$	0	0	$1/4$
$x=1$	0	$1/8$	0	$1/8$
$x=2$	0	0	$1/4$	$1/4$
$P(Y=y)$	$1/4$	$1/4$	$1/2$	

2. Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes, car
$$P((X=0)\cap(Y=1))=0\neq P(X=0)P(Y=1).$$
3. On a $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(X^3)-\mathrm{E}(X)=0-0=0$. Les variables aléatoires ne sont pas indépendantes, mais elles sont de covariance nulle.

Exercice 25 :

1. La variable aléatoire X_1 compte le nombre de succès quand on répète n fois de manière identique et indépendante une expérience de Bernoulli. Ainsi X_1 suit une loi binomiale de paramètre n et $p=1/3$.
2. De même X_2 et X_3 suivent une loi binomiale de paramètre n et $p=1/3$. On a donc $\mathrm{V}(X_1)=\mathrm{V}(X_2)=2n/9$. Avec la relation $X_1+X_2+X_3=n$, on a
$$\mathrm{V}(X_1+X_2)=\mathrm{V}(n-X_3)=\mathrm{V}(X_3)=\frac{2n}{9}.$$
3. On utilise la relation
$$\mathrm{V}(X_1+X_2)=\mathrm{V}(X_1)+2\mathrm{Cov}(X_1,X_2)+\mathrm{V}(X_2),$$
qui nous permet d'obtenir $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=-n/9$.

Exercice 26 :

1. La variable aléatoire V prend ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$. Pour $k\in[\![1,n]\!]$, on a
$$P(V\leqslant k)=P((X\leqslant k)\cap(Y\leqslant k))=P(X\leqslant k)P(Y\leqslant k)=\frac{k^2}{n^2}.$$
Finalement, on a
$$P(V=k)=P(V\leqslant k)-P(V\leqslant k-1)=\frac{k^2}{n^2}-\frac{(k-1)^2}{n^2}=\frac{2k-1}{n^2}.$$
De même pour la variable aléatoire U, on trouve
$$P(U=k)=\frac{2(n-k)+1}{n^2}.$$
2. On utilise la définition
$$\begin{aligned}\mathrm{E}(V)&=\sum_{k=1}^{n}k\frac{2k-1}{n^2}=\frac{2}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)\\&=\frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.\end{aligned}$$
En remarquant que $X+Y=U+V$, on obtient
$$\mathrm{E}(U)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)-\mathrm{E}(V)=(n+1)-\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.$$
3. On a la relation $XY=UV$. Comme X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, on a $\mathrm{E}(UV)=\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$, donc
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U,V)&=\mathrm{E}(UV)-\mathrm{E}(U)\mathrm{E}(V)=\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)-\mathrm{E}(U)\mathrm{E}(V)\\&=\frac{(n+1)^2}{4}-\frac{(n+1)^2(2n+1)(4n-1)}{36n^2}\\&=\frac{(n+1)^2(n-1)^2}{36n^2}.\end{aligned}$$

Exercice 27 :

1. Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$, on a
$$P((X=i)\cap(Y=j)) = P(Y=j \mid X=i)P(X=i) = \frac{1}{n(n-1)}.$$
La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Si $k \in [\![1,n]\!]$, on a avec la formule des probabilités totales
$$P(Y=k) = \sum_{i=1}^{n} P((X=i)\cap(Y=k)) = (n-1)\times\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}.$$
2. On commence par calculer
$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij P((X=i)\cap(Y=j))\\ &= \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij - \sum_{k=1}^{n} k^2\right)\\ &= \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.\end{aligned}$$
On en déduit
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{(n+1)^2}{4} = -\frac{n+1}{12}.$$
3. La variable aléatoire Z prend ses valeurs dans $[\![1,n-1]\!]$. Pour $k \in [\![1,n-1]\!]$, on a
$$\begin{aligned}P(Z=k) &= P(|X-Y|=k) = P((Y=X+k)\cup(Y=X-k))\\ &= P(Y=X+k)+P(Y=X-k),\end{aligned}$$
puis avec la formule des probabilités totales
$$\begin{aligned}P(Z=k) &= \sum_{i=1}^{n} P((X=i)\cap Y=i+k) + \sum_{i=1}^{n} P((X=i)\cap Y=i-k)\\ &= \sum_{i=1}^{n-k}\frac{1}{n(n-1)} + \sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{n(n-1)} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.\end{aligned}$$

Exercice 28 :

1. Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ avec $i<j$, on avec la formule des probabilités composées
$$\begin{aligned}P((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{n-2}{n}&\times\frac{n-3}{n-1}\times\cdots\times\frac{n-i}{n-i+2}\times\frac{2}{n-i+1}\\ &\times\frac{n-i-1}{n-i}\times\cdots\times\frac{n-j+1}{n-j+2}\times\frac{1}{n-j+1} = \frac{2}{n(n-1)}.\end{aligned}$$
On peut aussi remarquer qu'il y a $\binom{n}{2}$ façon de placer les boules dans l'ordre du tirage. Par équiprobabilité, on en déduit que
$$P((X=i)\cap(Y=j)) = \binom{n}{2}^{-1} = \frac{2}{n(n-1)}.$$
2. Pour $k \in [\![1,n-1]\!]$, on a avec la formule des probabilités totales
$$P(X=k) = \sum_{j=1}^{n} P((X=k)\cap(Y=j)) = \sum_{j=k+1}^{n}\frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$
De même pour $k \in [\![2,n]\!]$, on a
$$P(Y=k) = \sum_{i=1}^{n} P((X=i)\cap(Y=k)) = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}.$$
3. On utilise la définition
$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n-1} k\frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)}\left(n\sum_{k=1}^{n-1}k - \sum_{k=1}^{n-1}k^2\right)\\ &= \frac{2}{n(n-1)}\left(\frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = \frac{n+1}{3}.\end{aligned}$$
En effectuant un calcul analogue, on trouve $\mathrm{E}(Y) = 2(n+1)/3$.

4. On commence par calculer

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij P((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{2ij}{n(n-1)} \\
&= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} ij = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n} j^2(j-1) \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{2(n+1)^2}{9} = \frac{(n+1)(n-2)}{36}.$$

Exercice 29 : On peut écrire avec les propriétés de la variance

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left([Y-(aX+b)]^2\right) &= \mathrm{V}(Y-(aX+b)) + \mathrm{E}(Y-(aX+b))^2 \\
&= \mathrm{V}(Y-aX) + \mathrm{E}(Y-(aX+b))^2
\end{aligned}$$

Pour le second terme, on a

$$\mathrm{E}(Y-(aX+b))^2 = (\mathrm{E}(Y) - a\mathrm{E}(X) - b)^2$$

qui est nul lorsque $b = \mathrm{E}(Y) - a\mathrm{E}(X)$. Pour le premier terme, on a

$$\mathrm{V}(Y-aX) = a^2\mathrm{V}(X) - 2a\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{V}(Y).$$

qui est un polynôme du second degré en a car $\mathrm{V}(X) > 0$. Ainsi, le couple cherché est

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)} \quad \text{et} \quad b = \frac{\mathrm{V}(X)\mathrm{E}(Y) - \mathrm{Cov}(X,Y)\mathrm{E}(X)}{\mathrm{V}(X)}.$$