CHAPITRE 7
Probabilités sur un univers fini

I - Révisions sur les probabilités

I.1 - Espaces probabilisés finis

Exercice 1 : On tire une carte dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien de tirages différents sont possibles ?
2. Calculer la probabilité d'obtenir un roi.
3. Calculer la probabilité d'obtenir un cœur.
4. Calculer la probabilité d'obtenir un roi et un cœur.
5. Calculer la probabilité d'obtenir un roi ou un cœur.
6. Reprendre les questions précédentes en supposant que l'on tire deux cartes sans remise dans le jeu (« obtenir un » signifiera « obtenir au moins un »).

Exercice 2 (Problème du chevalier de Méré) **:** Est-il plus probable d'obtenir un six en lançant 4 fois un dé ou d'obtenir un double six en lançant 24 fois une paire de dés ?

Exercice 3 : Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés donnant 6 avec la probabilité 1/2. On choisit un dé au hasard, on le jette et on obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

Exercice 4 : Une urne contient 4 boules blanches et 5 boules noires. On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde noire et la troisième blanche ?

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire les boules deux par deux et sans remise jusqu'à vider l'urne.

1. Calculer la probabilité p_n que l'on tire à chaque tirage une boule blanche et une boule rouge.
2. Étudier la convergence de la suite (p_n). Interpréter le résultat.

Exercice 6 : Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tire une à une et sans remise trois boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule noire ?
2. Sachant que l'on a tiré une boule noire, quelle est la probabilité que la première boule soit noire ?

Exercice 7 : Une urne A contient 6 boules blanches et 5 boules noires, tandis qu'une urne B contient 4 boules blanches et 8 boules noires. On transfère aléatoirement deux boules de l'urne B dans l'urne A, puis on tire une boule dans l'urne A.

1. Calculer la probabilité que l'on tire une boule blanche.
2. On a tiré une boule blanche. Calculer la probabilité qu'au moins une boule blanche ait été transférée de l'urne B à l'urne A.

Exercice 8 : Une maladie est présente avec une fréquence de 10^{-4} dans la population. On utilise un test pour la dépister : si une personne est malade, le test est positif à 99%, tandis que si une personne n'est pas malade, le test est positif à $0,1$%.

1. Calculer la probabilité qu'une personne soit malade si le test est négatif.
2. Calculer la probabilité qu'une personne soit malade si le test est positif.

Exercice 9 : Dans une entreprise, 1% des articles produits sont défectueux. Un contrôle qualité permet de refuser 95% des articles défectueux mais aussi de refuser 2% des articles acceptables.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. Quelle est la probabilité qu'un article accepté soit en réalité défectueux ?

Exercice 10 : Un professeur oublie fréquemment ses clés. On suppose que le premier jour, il les oublie avec une probabilité $p_1 \in [0,1]$. Ensuite, si un jour donné il les oublie, le jour suivant il les oublie avec une probabilité $1/10$. A contrario, s'il ne les oublie pas un jour donné, le lendemain il les oublie avec la probabilité $4/10$. On note p_n la probabilité que le professeur oublie ses clés le n-ième jour.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = p_n - \frac{4}{13}$$
est géométrique.
3. En déduire une expression de p_n en fonction de p_1 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interpréter le résultat.

Exercice 11 : Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité $p \in]0,1[$, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit la même qu'au départ.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = p_n - \frac{1}{2}$$
est géométrique.
3. En déduire une expression de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

I.2 - Variables aléatoires

Exercice 12 : On lance deux dés tétraédriques équilibrés dont on note les résultats X et Y. On pose $D = X - Y$.

1. Déterminer la loi de D.
2. Déterminer l'espérance de D.
3. Déterminer la variance de D.

Exercice 13 : On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Calculer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Calculer l'espérance de $1/X$.

Exercice 14 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une entreprise souhaite recruter un employé parmi n candidats. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle de manière indépendante un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0,1[$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k-ième candidat qui réussit le test est engagé, et $X = n+1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Quelle valeur faut-il choisir pour p pour que l'on ait plus d'une chance sur deux de recruter un candidat.

Exercice 15 : Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset [\![0, N]\!]$. Montrer que
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{N-1} P(X > n).$$

II - Couples de variables aléatoires

II.1 - Généralités

Exercice 16 : Une commode est constituée de trois tiroirs. On y range aléatoirement une chaussette verte, une rouge et une noire. On note X le nombre de chaussettes que contient le premier tiroir et N le nombre de tiroirs vides.

1. Déterminer la loi du couple (X,N).
2. Déterminer la loi de X et la loi de N.
3. Calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires X et N.
4. Les variables aléatoires X et N sont-elles indépendantes ?

Exercice 17 : On lance deux dés tétraédriques équilibrés dont on note les résultats X et Y. On pose $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V), puis la loi de U et la loi de V.
2. Calculer l'espérance de U et l'espérance de V.
3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 18 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $[\![1,n]\!]$. On note $M = \max(X,Y)$.

1. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Calculer $P(X \leqslant k)$.
2. Calculer $P(X = Y)$, $P(X \leqslant Y)$ et $P(X \neq Y)$.
3. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Calculer $P(M \leqslant k)$.
4. Déterminer la loi de M en utilisant la question précédente.

Exercice 19 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $[\![1,n]\!]$.

1. Déterminer la loi de $S = X + Y$.
2. Calculer l'espérance de S et l'espérance de XY.
3. Les variables aléatoires X et S sont-elles indépendantes ?

Exercice 20 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = aij.$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer la loi de X et l'espérance de X.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.
5. Déterminer la loi de $M = \max(X,Y)$.

Exercice 21 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n boites numérotées de 1 à n. La boite k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard de façon équiprobable une boite, puis une boule dans cette boite. On note X le numéro de la boite et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
3. Calculer l'espérance de X et de Y.

Exercice 22 (Estimation) **:** Une population de personnes présente une propriété donnée avec une proportion inconnue $p \in]0,1[$. On choisit un échantillon de $n \in \mathbb{N}^*$ personnes et l'on pose $X_i = 1$ si le i-ième individu présente la propriété étudiée, $X_i = 0$ sinon. On considère que les variables aléatoires X_i sont indépendantes et suivent une loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Quelle est la loi suivie par $S_n = X_1 + \cdots + X_n$?
2. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n/n.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer l'inégalité
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$
4. Quelle valeur de n doit-on choisir pour que S_n/n soit une approximation de p à 0,05 près avec une probabilité supérieure à 95% ?

Exercice 23 : Soit $(n, N) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On considère $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. On considère la variable aléatoire $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Déterminer la loi de M_n.
2. Déterminer la limite de la suite $(P(M_n = N))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interpréter le résultat.

II.2 - Covariance d'un couple de variables aléatoires

Exercice 24 : Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

k	-2	-1	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

On note $Y = X^2$.

1. Déterminer la loi de Y et la loi du couple (X, Y).
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la covariance de X et Y. Commentaire ?

Exercice 25 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À un péage autoroutier n voitures franchissent équiprobablement et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2.

Exercice 26 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $[\![1, n]\!]$. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de U et la loi de V.
2. Calculer l'espérance de U et l'espérance de V.
3. Calculer la covariance de U et V.

Exercice 27 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remise deux jetons. On note X le numéro du premier jeton tiré et Y celui du second.

1. Déterminer la loi du couple de (X, Y), la loi de X et la loi de Y.
2. Calculer la covariance de X et Y.
3. Déterminer la loi de $Z = |X - Y|$.

Exercice 28 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$. Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne. On note X le rang de sortie de la première boule blanche et Y le rang de sortie de la seconde boule blanche.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
3. Calculer l'espérance de X et l'espérance de Y.
4. Calculer la covariance de X et Y.

Exercice 29 : Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini telles que que $\mathrm{V}(X) > 0$. Déterminer pour quel couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la quantité $\mathrm{E}\left([Y - (aX + b)]^2\right)$ est minimale.