CHAPITRE 12

Probabilités sur un univers dénombrable

Exercice 1 :

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement « l'erreur n'est pas corrigé durant la n -ième relecture ». On souhaite calculer la probabilité de l'évènement $A_1 \cap \dots \cap A_n$. Par indépendance, on a

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

2. Pour tout entier $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on note E_j l'évènement « l'erreur numéro j est corrigé à l'issue de la n -ième relecture ». On souhaite calculer la probabilité de l'évènement $E_1 \cap E_2 \cap E_3$. Avec le résultat de la question précédente, et par indépendance, on a

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) &= P(E_1)P(E_2)P(E_3) \\ &= (1 - P(\bar{E}_1))(1 - P(\bar{E}_2))(1 - P(\bar{E}_3)) \\ &= \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)^3. \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, il faut résoudre l'inéquation

$$\begin{aligned} \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)^3 &\geq 0,95 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 1 - (0,95)^{1/3} \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{\ln(1 - (0,95)^{1/3})}{\ln(3/4)} \approx 14,17 \end{aligned}$$

Donc il faut 15 relectures au minimum.

Exercice 2 : On note A l'évènement dont on veut calculer la probabilité dans l'exercice. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère également A_n l'évènement « les $n - 1$ premiers lancer donne 2 ou 4 et le n -ième lancers donne 6 ». Comme les A_n sont des évènements incompatibles, on a

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

Si on note B_i l'évènement « la i -ième lancer donne 2 ou donne 4 » ainsi que C_i l'évènement « le i -ième lancer donne un 6 », on a par indépendance

$$P(A_n) = P(B_1 \cap \dots \cap B_{n-1} \cap C_n) = P(B_1) \cdots P(B_{n-1})P(C_n) = \frac{1}{3^{n-1}} \frac{1}{6}.$$

Finalement, avec la formule donnant la somme d'une série géométrique, on a

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n-1}} \frac{1}{6} = \frac{1/6}{1 - 1/3} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 3 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement « le joueur 1 atteint la cible au n -ième tir » et B_n l'évènement « le joueur 2 atteint la cible au n -ième tir ». Le joueur 1 gagne est l'évènement

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \underbrace{(\bar{A}_1 \cap \bar{B}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1} \cap \bar{B}_{n-1} \cap A_n)}_{C_n}.$$

Par indépendance, on a

$$P(C_n) = P(\bar{A}_1)P(\bar{B}_1) \cdots P(\bar{A}_{n-1})P(\bar{B}_{n-1})P(A_n) = [(1 - p_1)(1 - p_2)]^{n-1} p_1,$$

puis, on en déduit en utilisant la somme d'une série géométrique

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} [(1 - p_1)(1 - p_2)]^{n-1} p_1 = \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}.$$

2. En notant B l'évènement « le joueur 2 gagne », on obtient en procédant comme dans la question précédente

$$P(B) = \frac{(1-p_1)p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}.$$

L'évènement « le jeu se termine » est $A \cup B$, et on a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2} + \frac{(1-p_1)p_2}{p_1+p_2-p_1p_2} = 1,$$

donc le jeu se termine quasi-certainement.

3. Le jeu est équitable si et seulement si

$$P(A) = P(B) \Leftrightarrow p_1 = (1-p_1)p_2 \Leftrightarrow p_2 = \frac{p_1}{1-p_1} \text{ si } p_1 \neq 1.$$

Avec cette relation, la condition $p_2 \in]0, 1]$ est vérifiée si et seulement si on a l'inégalité $p_1 \leq 1/2$. Finalement, le jeu est équilibré si et seulement si

$$0 < p_1 \leq 1/2 \text{ et } p_2 = \frac{p_1}{1-p_1}.$$

Exercice 4 :

1. En réduisant au même dénominateur, on obtient

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha(n+1) + \beta n = 1 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, (\alpha + \beta)n + \alpha = 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha + \beta = 0 \text{ et } \alpha = 1 \\ &\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (-1, 1). \end{aligned}$$

2. On doit avoir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1 \Leftrightarrow a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Or, en utilisant la question précédente, on a

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1,$$

donc $a = 1$.

3. On a l'équivalent $nP(X = n) = 1/(n+1) \underset{+\infty}{\sim} 1/n \geq 0$, donc la série de terme général $nP(X = n)$ ne converge pas absolument par comparaison. On conclut que la variable aléatoire X n'admet pas d'espérance.

Exercice 5 :

1. En réduisant au même dénominateur, on obtient

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha(n+1)(n+2) + \beta n(n+2) + \gamma n(n+1) &= 1 \\ \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, (\alpha + \beta + \gamma)n^2 + (3\alpha + 2\beta + \gamma)n + 2\alpha &= 1 \\ \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ et } 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \text{ et } 2\alpha &= 1 \\ \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

2. On doit avoir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1 \Leftrightarrow a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = 1.$$

Or l'on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} - \frac{1}{2} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

donc $a = 4$.

3. On a l'équivalent $nP(X = n) = 4/(n+1)(n+2) \underset{+\infty}{\sim} 1/n^2 \geq 0$. On en déduit que la série de terme général $nP(X = n)$ converge absolument par comparaison, donc la variable aléatoire X admet une espérance. De plus,

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(n+1)(n+2)}.$$

Or l'on a

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2},$$

donc $E(X) = 2$.

Exercice 6 :

1. Pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$, on note F_i l'évènement « on fait face au i -ième lancer ». On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors par la formule des probabilités totales selon la position du premier pile

$$\begin{aligned} P(X = n) &= \sum_{i=1}^{n+1} P(F_1 \cap \dots \cap F_{i-1} \cap \bar{F}_i \cap F_{i+1} \cap \dots \cap F_{n+1} \cap \bar{F}_{n+2}) \\ &= (n+1)(1-p)^n p^2. \end{aligned}$$

2. La variable aléatoire X admet une espérance si la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{n(n+1)(1-p)^n p^2}_{u_n}$$

converge absolument. Or, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)(n+2)(1-p)^{n+1} p^2}{n(n+1)(1-p)^n p^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1-p < 1,$$

donc la série converge absolument par la règle de d'Alembert. En utilisant la formule

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3},$$

on obtient

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)(1-p)^n p^2 = \frac{2p^2(1-p)}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p}.$$

Exercice 7 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n l'évènement « on fait face au n -ième lancer ».

$$p_2 = P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2) = P(\bar{F}_1)P(\bar{F}_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

$$p_3 = P(F_1 \cap \bar{F}_2 \cap \bar{F}_3) = P(F_1)P(\bar{F}_2)P(\bar{F}_3) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27},$$

$$\begin{aligned} p_4 &= P(F_1 \cap F_2 \cap \bar{F}_3 \cap \bar{F}_4) + P(\bar{F}_1 \cap F_2 \cap \bar{F}_3 \cap \bar{F}_4) \\ &= P(F_1)P(F_2)P(\bar{F}_3)P(\bar{F}_4) + P(\bar{F}_1)P(F_2)P(\bar{F}_3)P(\bar{F}_4) \\ &= \frac{4}{81} + \frac{8}{81} = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}. \end{aligned}$$

2. On utilise le système complet d'évènement $F_1, \bar{F}_1 \cap F_2$ et $\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2$ avec la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= P(X = n+2) = P(X = n+2 | F_1)P(F_1) \\ &\quad + P(X = n+2 | \bar{F}_1 \cap F_2)P(\bar{F}_1 \cap F_2) + P(X = n+2 | \bar{F}_1 \cap \bar{F}_2)P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2), \end{aligned}$$

d'où en simplifiant

$$p_{n+2} = \frac{1}{3} \times P(X = n+2 | F_1) + \frac{2}{9} \times P(X = n+2 | \bar{F}_1 \cap F_2).$$

Or, si l'on sait que l'on a fait face au premier lancer, il reste $n+1$ lancer où il faut obtenir le double pile pour la première fois au $n+1$ -ième lancer. En raisonnement de même si on fait pile, puis face, on obtient

$$p_{n+2} = \frac{1}{3} p_{n+1} + \frac{2}{9} p_n.$$

3. La suite (p_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée

$$x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = \left(x - \frac{2}{3}\right) \left(x + \frac{1}{3}\right).$$

On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = a \left(\frac{2}{3}\right)^n + b \left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

En évaluant l'expression pour $n = 2$ et $n = 3$, on conclut que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3} \left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

4. Rappelons que l'on a la formule

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

On en déduit que X admet une espérance car la série de terme général

$$|nP(X = n)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

est convergente, puis que

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{-1}{3}\right)^n \\ &= \frac{2}{3} \frac{2/3}{(1-2/3)^2} + \frac{4}{3} \frac{-1/3}{(1+1/3)^2} = \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 8 :

1. (a) Par la formule des probabilités composées, on a pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$P(X = k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-1)+1} \times \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}.$$

Ainsi X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

(b) L'espérance d'une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ est $E(X) = (n+1)/2$.

2. (a) On se trouve dans la situation où X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1/n$.

(b) D'après le cours, X admet une espérance et $E(X) = n$.

Exercice 9 :

1. Avec la somme de la série géométrique, on a

$$\begin{aligned} P(A) &= \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (X = 2k) \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{2k-1} \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k} = \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2}. \end{aligned}$$

2. Avec la somme de la série géométrique, on a

$$\begin{aligned} P(B) &= \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (X = 3k) \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 3k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{3k-1} \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{3k} = \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)^3}{1-(1-p)^3} = \frac{p(1-p)^2}{1-(1-p)^3}. \end{aligned}$$

3. L'évènement $A \cap B$ est « le nombre X est un multiple de 6 ». Avec la somme de la série géométrique, on en déduit que

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (X = 6k) \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 6k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{6k-1} \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{6k} = \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)^6}{1-(1-p)^6} = \frac{p(1-p)^5}{1-(1-p)^6}. \end{aligned}$$

En notant $q = 1 - p$, on a que A et B sont indépendants si et seulement si

$$\begin{aligned} P(A \cap B) = P(A)P(B) &\Leftrightarrow \frac{(1-q)q^5}{1-q^6} = \frac{(1-q)^2 q^3}{(1-q^2)(1-q^3)} \\ &\Leftrightarrow \frac{(1-q)q^5}{(1-q+q^2)(1+q)(1-q^3)} = \frac{(1-q)^2 q^3}{(1-q)(1+q)(1-q^3)} \\ &\Leftrightarrow q = 1. \end{aligned}$$

Comme $q \in]0, 1[$ on en déduit que A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 10 : Par le théorème du transfert, l'espérance de $1/X$ existe si et seulement si la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{p(1-p)^{k-1}}{k}}_{u_k}$$

est absolument convergente. Or, on a

$$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \frac{p(1-p)^k}{k+1} \frac{k}{p(1-p)^{k-1}} = \frac{k}{k+1} (1-p) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1-p,$$

donc la série converge absolument par la règle de d'Alembert. On a alors

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p(1-p)^{k-1}}{k} = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^k}{k} = -\frac{p}{1-p} \ln(p).$$

Exercice 11 :

1. Tout les couples ont un garçons et X enfants, donc $P = 1/X$.
2. Les couples continuent à faire un enfant tant qu'ils n'ont pas un garçon. On en déduit que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1/2$.
3. Par le théorème du transfert, l'espérance de $P = 1/X$ existe si et seulement si la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{k2^k}}_{u_k}$$

est absolument convergente. Or, on a

$$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \frac{k2^k}{(k+1)2^{k+1}} = \frac{k}{2(k+1)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2},$$

donc la série converge absolument par la règle de d'Alembert. On a alors

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1/2)^k}{k} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2).$$

Exercice 12 : Par le théorème du transfert, l'espérance de $1/(X+1)$ existe si et seulement si la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{\lambda^k}{(k+1)!} e^{-\lambda}}_{u_k}$$

est absolument convergente. Or, on a

$$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \frac{\lambda^{k+1} e^{-\lambda} (k+1)!}{(k+2)! \lambda^k e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{k+2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

donc la série converge absolument par la règle de d'Alembert. On a alors

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} e^{-\lambda} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}(e^{\lambda}-1)}{\lambda} = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Exercice 13 : D'après l'énoncé, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k | N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On en déduit que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = k | N = n) P(N = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{(p\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(p\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^\ell}{\ell!} \\ &= \frac{(p\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!} e^{(1-p)\lambda} = \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-p\lambda}, \end{aligned}$$

donc X suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

Exercice 14 :

1. Par la formule des probabilités totales, on a

$$p = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-a}$$

$$q = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^{2k}}{(2k)!} e^{-a}.$$

On en déduit que $p + q = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-a}$ et que

$$p - q = e^{-a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n!} = e^{-a} (1 - e^{-a}),$$

donc

$$p = \frac{1}{2}(1 - e^{-2a}) \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{2}(1 - e^{-a})^2.$$

2. Notons G le gain de Pierre. On peut écrire

$$G = \left\{ \begin{array}{ll} -X & \text{si } X \text{ est pair} \\ X & \text{si } X \text{ est impair} \end{array} \right\} = (-1)^{X+1} X.$$

Par le théorème du transfert, G admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^{n+1} n P(X = n)}_{u_n}$$

est absolument convergente. Or l'on a $|u_n| = nP(X = n)$ qui est le terme général d'une série convergente, car la loi de Poisson admet une espérance. Finalement,

$$E(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n \frac{a^n}{n!} e^{-a}$$

$$= e^{-a} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{(n-1)!} = ae^{-a} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (-1)^\ell \frac{a^\ell}{\ell!} = ae^{-2a}.$$

L'espérance des gains de Pierre est donc ae^{-2a} et celle de Paul est $-ae^{-2a}$.

3. Pierre est avantagé dans ce jeu, car la moyenne de ses gains est positive, tandis que celle de Paul est négative.