Concours Communs INP
Oral de Mathématiques

Modalité de l'épreuve : L'épreuve se déroule en deux temps.

- **Préparation - 30 minutes :** Chaque candidat recevra l'énoncé d'un exercice de mathématiques, avec un questionnement détaillé, contenant une ou deux questions nécessitant l'utilisation de Python, soit comme aide à la conjecture, soit comme illustration, soit comme outil de calcul numérique. Un ordinateur sera à disposition du candidat durant la préparation. Les interrogations porteront sur le programme de mathématiques, mais pourront s'appuyer sur des compétences du programme d'informatique pour tous.
- **Présentation - 30 minutes :** Le candidat disposera d'un maximum de 20 minutes pour exposer au tableau l'exercice préparé, en se servant de l'outil informatique s'il le juge nécessaire. L'utilisation de Python en tant que support pour répondre à d'autres questions que celles spécifiquement identifiées comme nécessitant l'usage de l'outil informatique sera possible avec l'accord de l'examinateur. Dans le temps restant, une question ouverte non connue du candidat lors de sa préparation sera proposée à la lecture. Dans certains cas qui seront précisés, le candidat aura la possibilité de proposer des pistes mettant en œuvre Python, mais cela ne sera en aucun cas une obligation.

Exercice avec préparation

Exercice 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.

1. Écrire en langage Python une fonction `somme(n)` prenant en paramètre un entier naturel non nul `n` et renvoyant la valeur de S_n.
2. Donner la valeur de S_{10}, de S_{100} et de S_{1000}. Que peut-on observer ?
3. (a) Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x}}$.

   (b) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\sqrt{3}-1$.

Exercice 2 : Soit $\mathscr{S}$ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2+y^2+z^2+2xyz-1=0$.

1. Écrire en langage Python une fonction `appartient(M)` renvoyant `TRUE` si le point `M` passé en paramètre appartient à la surface $\mathscr{S}$ et `FALSE` dans le cas contraire.
2. Le point de coordonnées $(0,0,0)$ appartient-il à $\mathscr{S}$?
3. On définit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ par $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2xyz-1$.

   (a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calculer le gradient de f au point (x_0,y_0,z_0).
4. Déterminer l'ensemble des points singuliers de $\mathscr{S}$.
5. Donner l'équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$ à un point régulier de $\mathscr{S}$ dont les coordonnées seront notées (x_0,y_0,z_0).
6. Déterminer l'intersection de la surface $\mathscr{S}$ avec le plan d'équation $x=a$ dans le cas $a=1$ ou $a=-1$.
7. Déduire à l'aide de la question précédente que la surface $\mathscr{S}$ contient exactement 6 droites.

Exercice 3 : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme dont la matrice dans une base orthonormée directe (i, j, k) est

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Écrire en langage Python une fonction `monProd(a,b)` prenant en paramètre deux vecteurs `a` et `b` de $\mathbb{R}^3$ et renvoyant le produit scalaire de `a` et `b`.
2. Montrer que f est un automorphisme orthogonal direct.
3. Montrer que le vecteur $u = (3, -1, -1)$ est invariant par f. En déduire la nature de l'isométrie f.
4. Montrer que le vecteur $v = (1, 3, 0)$ est orthogonal à u.
5. Donner les éléments caractéristiques de cette transformation.

Exercice 4 :

1. Montrer l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{3n}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Étudier la convergence absolue de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-t)^{3n}$ pour $t \in [0, 1]$ et $N \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = 0$.
5. En déduire que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.
6. Écrire en langage Python une fonction `somme(N)` prenant en paramètre un entier naturel non nul `N` et renvoyant la valeur $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 5 : Un message doit transiter par un certain nombre de personnes. Chaque personne est susceptible soit de transmettre le message fidèlement à la suivante, soit de mentir et de lui transmettre son exact contraire. La probabilité qu'une personne mente est notée $p \in]0, 1[$. On suppose que les personnes ne se concertent pas entre elles. On note p_n la probabilité que le message transmis par la n^{e} personne soit identique au message initial. On conviendra que $p_0 = 1$.

1. (a) Proposer une fonction Python d'en-tête `chaine(n,p)` qui simule la réalisation de `n` transmissions, `n` étant un entier naturel non nul fourni en paramètre et `p` la probabilité définie dans l'énoncé. Elle renverra 1 si le message transmis par la n^{e} personne est identique au message initial et 0 sinon.
   (b) On répète N chaînes toutes de mêmes paramètres n et p. À l'aide de la fonction précédente, proposer une fonction d'en-tête `simul(N,n,p)` qui renvoie la proportion de messages correctement transmis par la n$^{\text{e}}$ personne au cours de `N` réalisations de cette même chaîne. Tester la fonction pour différentes valeurs de p (on pourra prendre $n = 200$ et $N = 3000$). Que constate-t-on ?
2. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = p + (1-2p)p_n.$$
3. (a) Déterminer un réel x tel que $x = p + (1-2p)x$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = p_n - x$ est géométrique.
   (c) En déduire une expression de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter et commenter.

Exercice 6 : On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ avec

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X+1 \quad \text{et} \quad P_2 = (X+2)^2.$$

1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Écrire en Python une fonction prenant en paramètre les entiers i et j et renvoyant la valeur du produit scalaire $(P_i \mid P_j)$.
4. La base $\mathscr{B}$ est-elle orthonormée ?
5. À partir de $\mathscr{B}$, construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.
6. On note H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ engendré par P_1 et P_2. Déterminer la distance du polynôme X^2 à H puis la distance de 1 à H.

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}.$$

1. Tracer à la main en justifiant la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f (on pourra utiliser une intégration par parties pour déterminer la valeur de a_n pour $n \in \mathbb{N}^*$).
3. Montrer que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, on a
$$\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$
4. Déduire de la question précédente que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.
5. (a) Écrire en langage Python une fonction `somme(N)` prenant en paramètre un entier naturel non nul `N` et renvoyant la valeur $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.
   (b) Calculer et comparer les valeurs S_{10}, S_{100} et S_{1000} à $\pi^2/12$.

Exercice 8 : Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M_a.
2. Soit $B \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a l'équation $M_a X = B$ admet une unique solution.
3. On s'intéresse au système différentiel (S) suivant
$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& x + 0,5y + 2,5z + w \\ y' &=& 2,5x - y + z + 2,5w \\ z' &=& -2,5z + w \\ w' &=& -z. \end{array}\right.$$
On note A la matrice associée au système (S).
   (a) Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. On déterminera ces matrices à l'aide de Python en utilisant les deux fonctions suivantes de la bibliothèque `numpy` : `numpy.linalg.eig` et `numpy.diag`.
   (b) Déterminer à la main la solution Y_0 du système différentiel $Y' = DY$ telle que $Y_0(0) = (1\ 1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}$.
   (c) Écrire, en Python, une fonction `solution(t)` prenant en paramètre un nombre réel `t`, et renvoyant la valeur $X(t)$ où X est la solution de (S) vérifiant $P^{-1}X(0) = Y_0$.

Exercice 9 : Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O, i, j)$. On considère la courbe Γ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) & = & \dfrac{2t-1}{t^2-1} \\ y(t) & = & \dfrac{t^2+3}{t-1}. \end{cases}$$

On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), y(t))$.

1. Donner les ensembles de définition des fonction x et y.
2. Étudier la courbe paramétrée Γ.
3. Justifier l'existence d'asymptotes verticales et horizontales et préciser leur équation respective.
4. (a) Définir en Python les fonctions `abscisse(t)` et `ordonnee(t)` prenant en paramètre un réel `t` et renvoyant respectivement $x(t)$ et $y(t)$.
   (b) Tracer avec Python la courbe $t \mapsto y(t)/x(t)$ sur l'intervalle $I_1 = [2/3, 1[$. On pourra utiliser la commande `linspace`.
   (c) Tracer avec Python la courbe $t \mapsto y(t)/x(t)$ sur l'intervalle $I_2 =]1, 4/3]$. On pourra utiliser la commande `linspace`.
   (d) Que constate-t-on ? Justifier votre réponse par le calcul.
   (e) Tracer la courbe $t \mapsto y(t) - 8x(t)$ sur les intervalles I_1 et I_2.
   (f) Que constate-t-on ? En déduire l'équation d'une droite asymptote à la courbe. Vous démontrerez votre conjecture.

Exercice 10 : Vous avez une trousse contenant 10 stylos dont un seul fonctionne.

1. Vous les essayez l'un après l'autre jusqu'à trouver celui qui fonctionne. Combien devrez vous effectuer d'essais de stylo en moyenne ?
2. Même question si l'on suppose qu'à chaque essai infructueux, vous remettez (à tort) le stylo dans la trousse et que vous tirez au hasard à nouveau.
3. Vous en essayez un au hasard, puis s'il y a échec, un deuxième puis, s'il y a échec, vous remettez le premier et vous tirez au hasard le troisième puis, s'il y a échec, vous remettez le deuxième et vous tirez au hasard le quatrième, puis... Combien devrez vous effectuer d'essais de stylo en moyenne pour trouver le bon ?
4. (a) Proposer dans chacune des trois situations, une fonction Python d'en-tête `simul1(s)` (pour la première, puis `simul2(s)` et `simul3(s)` pour les suivantes) renvoyant le nombre d'essais nécessaires à la découverte du bon stylo, `s` étant le nombre de stylos (ici 10).
   (b) À l'aide des fonctions précédentes, écrire une fonction `esp(N, s)` qui fournit la moyenne du nombre d'essais nécessaires au cours de `N` réalisations de la même expérience où `s` correspond au nombre de stylos. Confronter les résultat expérimentaux aux valeurs trouvées dans les questions précédentes.

Exercice 11 : Pour $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, on définit $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}} B)$.

1. (a) Écrire en langage Python une fonction `trace(M)` prenant en paramètre une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et renvoyant la valeur $\mathrm{Tr}(M)$.
   (b) Écrire en langage Python une fonction `phi(A,B)` prenant en paramètre un couple de matrices $(A, B) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$ et renvoyant la valeur $\varphi(A, B)$.
2. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a $\left(\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}} B)\right)^2 \leqslant \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}} A)\mathrm{Tr}(B^{\mathrm{T}} B)$.
4. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\left(\mathrm{Tr}(A)\right)^2 \leqslant n\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}} A)$. Préciser les cas d'égalité.

Exercice 12 : Soit $a \in]0,1[$. On définit la fonction 2π-périodique $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in]-\pi,\pi], \quad f_a(t) = \cos(at).$$

1. Tracer avec Python la courbe $x \mapsto f(x)$ sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$. On pourra utiliser la commande `linspace`.
2. Exprimer $\sin\big((a+n)\pi\big)$ en fonction de $\sin(a\pi)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\cos(ax)\cos(nx) = \frac{1}{2}\Big(\cos\big((a+n)x\big) + \cos\big((a-n)x\big)\Big).$$
4. Calculer les coefficients de Fourier de f_a.
5. Montrer que pour tout $x \in]-\pi,\pi[$, on a
$$\cos(ax) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2a\sin(a\pi)}{\pi(n^2-a^2)} \cos(nx).$$

Exercice 13 : On considère les suites

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}.$$

1. Étudier la convergence de (S_n). Montrer que sa limite est $\ell = \ln(2)$.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad R_n \leqslant \frac{1}{(n+1)2^n}.$$
3. En déduire que $\ell - S_n \leqslant \dfrac{1}{n2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Écrire en langage Python une fonction `somme(n)` prenant en paramètre un entier naturel non nul `n` et renvoyant la valeur S_n.
5. Écrire en langage Python une fonction `approx(a)` prenant en paramètre nombre réel strictement positif `a` et renvoyant une valeur S_n où n est choisi tel que $\ell - S_n < a$.

Exercice 14 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On considère la matrice

$$U_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Écrire en langage Python une fonction `mat(n)` prenant en paramètre un entier naturel $n \geqslant 2$ et retournant la matrice U_n.
2. Écrire en langage Python une fonction `val(n)` prenant en paramètre un entier naturel $n \geqslant 2$ et retournant les valeurs propres de la matrice U_n. On pourra utiliser la fonction `numpy.linalg.eig` de la bibliothèque `numpy`.
3. Déterminer le rang de la matrice U_n.
4. Donner une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.
5. Montrer que si C est un vecteur propre de la matrice U_n associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors
$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}, \quad C = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & \lambda a \\ (n-1)a+b & = & \lambda b. \end{array} \right.$$
6. En déduire les valeurs propres de U_n.

Exercice 15 : On considère la fonction f définie par

$$f(x)=\frac{1}{-x^2+x+2}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Tracer avec Python la courbe $x\mapsto f(x)$ sur l'intervalle $]-1,1[$. On pourra utiliser la commande `linspace`.
3. Déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x\in\mathscr{D}_f,\quad \frac{1}{-x^2+x+2}=\frac{a}{1+x}+\frac{b}{2-x}.$$

4. Donner le développement en série entière et le rayon de convergence de

$$\frac{1}{1+x}\quad\text{et}\quad\frac{1}{2-x}.$$

5. Montrer que f est développable en série entière. Déterminer ce développement et son rayon de convergence.

Exercice 16 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie par $f(x)=\ln(1-\ln(x))$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Tracer avec Python la courbe $x\mapsto f(x)$ sur l'intervalle $]0,\mathrm{e}[$. On pourra utiliser la commande `linspace`.
3. Donner le tableau de variation de f.
4. Montrer que f admet une fonction réciproque g. Déterminer g.
5. Montrer que $f(x)=\ln(2)$ admet une unique solution $\alpha\in D_f$. Calculer α.
6. Montrer que f'' s'annule une seule fois en un réel β que l'on calculera.
7. Donner la tangente en β à $\mathscr{C}_f$ et la position relative par rapport à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 17 :

1. Rappeler le développement limité en 0 de $\ln(1+x)$. En déduire, lorsque n tend vers $+\infty$, que

$$\ln(1+n)=\ln(n)+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n=\ln(n)-2\ln(n+1)+\ln(n+2)$.
   (a) Écrire en langage Python une fonction `suite(n)` prenant en paramètre un entier naturel non nul `n` et retournant la valeur de u_n.
   (b) Calculer u_{10}, u_{100} et u_{1000}. Que peut-on observer ?
   (c) En utilisant la première question, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
3. On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$.
   (a) Écrire en langage Python une fonction `somme(n)` prenant en paramètre un entier naturel non nul `n` et retournant la valeur de S_n.
   (b) Calculer S_{10}, S_{100} et S_{1000}. Que peut-on observer ?
   (c) Montrer que $S_n=\ln(n+2)-\ln(n+1)-\ln(2)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
   (d) En déduire que $\sum u_n$ converge et donner sa valeur.

Exercice 18 : On considère la matrice

$$A=\begin{pmatrix}-5&3\\-6&4\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A=PDP^{-1}$. On déterminera ces matrices à l'aide de Python en utilisant les deux fonctions `numpy.linalg.eig` et `numpy.diag` de la bibliothèque `numpy`.
2. Montrer que si $Y\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $Y^3=D$, alors Y commute avec D. En déduire que Y est diagonale.
3. En déduire les matrices $Y\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $Y^3=D$.
4. En déduire l'ensemble des matrices $M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^3=A$.

Exercice 19 : On note $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \text{Arctan}(2^{-k}) x^k$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\text{Arctan}(x) \leqslant x$.
2. Montrer que la fonction f est définie sur $[-1, 1]$.
3. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \text{Arctan}(2^{-k}) x^k \right| \leqslant 2^{-n}.$$
4. Écrire en langage Python une fonction `somme(n,x)` prenant en paramètre un entier naturel `n` et un réel `x` et retournant la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \text{Arctan}(2^{-k}) x^k$.

Exercice 20 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + (-1)^n.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. (a) Écrire en langage Python une fonction `suite(n)` prenant en paramètre un entier naturel `n` et retournant la valeur de u_n.
   (b) En utilisant votre fonction, conjecturer la convergence ou la divergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $|u_n| \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.
4. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Calculer et simplifier $f(x) - \frac{x}{2} f(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
5. En déduire que
$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{2x}{(1+x)(2-x)},$$
puis une expression de la suite (u_n).

Exercice 21 : On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale
$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-n}}{1+t} \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer I_1.
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
3. En majorant l'intégrale, montrer que (I_n) converge vers 0.
4. Calculer $I_n + I_{n+1}$. En déduire un équivalent de (I_n).
5. En utilisant la question 4, écrire en langage Python une fonction `suite(n)` prenant en paramètre un entier naturel `n` et retournant la valeur de I_n.

Exercice 22 : On définit les suites (u_n), (v_n) et (w_n) par $(u_0, v_0, w_n) \in \mathbb{R}^3$ et
$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + \frac{2}{3} v_n - \frac{4}{3} w_n \\ v_{n+1} &= -3u_n + \frac{5}{3} v_n + \frac{5}{3} w_n \\ w_{n+1} &= -\frac{3}{2} u_n + \frac{2}{3} v_n + \frac{7}{6} w_n. \end{cases}$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Écrire en langage Python une fonction `suite(n,V)` prenant en paramètre un entier naturel `n` et un vecteur `V` de $\mathbb{R}^3$ et retournant le vecteur X_n obtenu en utilisant la condition initiale $X_0 = V$.
2. Déterminer $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer AC_1, AC_2 et AC_3. En déduire que la matrice A est diagonalisable.
4. Justifier qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X_0 = aC_1 + bC_2 + cC_3$.
5. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = a\left(\frac{5}{2}\right)^n C_1 + bC_2 + c\left(\frac{1}{3}\right)^n C_3.$$

Exercice 23 : On définit pour $n \in \mathbb{N}$, le nombre

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
4. (a) Écrire en langage Python une fonction `suite(n)` prenant en paramètre un entier naturel `n` et retournant la valeur de I_n.
   (b) Calculer I_{10}, I_{100} et I_{1000}. Que peut-on observer ?
5. En utilisant la question 3, déterminer une expression de I_{2p} et I_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 24 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = |\cos(x)|.$$

1. Montrer que f est π-périodique.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Démontrer les relations suivantes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4},$$

4. (a) Écrire en langage Python une fonction `somme(N)` prenant en paramètre un entier naturel non nul `N` et renvoyant la valeur $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.
   (b) Calculer et comparer les valeurs S_{10}, S_{100} et S_{1000} à $(\pi-2)/4$.
5. Montrer que l'on a la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}.$$

Exercice 25 : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On définit la matrice

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. (a) Écrire en langage Python une fonction `matrice(a,b)` prenant en paramètre un couple de nombres réels `(a,b)` et retournant la matrice $M(a,b)$.
   (b) Écrire en langage Python une fonction `val(a,b)` prenant en paramètre un couple de nombres réels `(a,b)` et retournant les valeurs propres de la matrice $M(a,b)$. On pourra utiliser la fonction `numpy.linalg.eig` de la bibliothèque `numpy`.
2. Diagonaliser la matrice $M(a,b)$.
3. Calculer $M(a,b)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 26 : On considère le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & y+z \\ y' & = & x \\ z' & = & x+y+z \end{array}\right. \qquad (S)$$

avec les conditions $x(0)=1$, $y(0)=3$ et $z(0)=2$.

1. Réécrire le système matriciellement sous la forme $X' = AX$.
2. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. On déterminera ces matrices à l'aide de Python en utilisant fonctions `numpy.linalg.eig` et `numpy.diag` de la bibliothèque `numpy` : .
3. Résoudre le système différentiel (S).
4. Montrer que si $f = (x,y,z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est solution de S, alors la courbe paramétrée par f est incluse dans un plan affine de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une équation.

Exercice 27 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \cos(x))$. On définit la suite (x_n) par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Écrire en langage Python une fonction `suite(n)` prenant en paramètre un entier naturel `n` et retournant la valeur de x_n.
   (b) Calculer x_{10}, x_{100} et x_{1000}. Que peut-on observer ?
2. Montrer que la fonction f est croissante.
3. Montrer que la suite (x_n) est positive et décroissante.
4. En déduire que la suite (x_n) converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$ vérifiant $\cos(\ell) = \ell$.
5. Combien de solution l'équation $\cos(x) = x$ admet-elle pour $x \in \mathbb{R}$?

Exercice 28 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = |\sin(x)|.$$

1. Montrer que f est π-périodique.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Démontrer les relations suivantes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4},$$

4. (a) Écrire en langage Python une fonction `somme(N)` prenant en paramètre un entier naturel non nul `N` et renvoyant la valeur $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.
   (b) Calculer et comparer les valeurs S_{10}, S_{100} et S_{1000} à $(\pi-2)/4$.
5. Montrer que l'on a la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}.$$

Exercice 29 : On considère le courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = (x(t), y(t)) = \left(\frac{\sin^2(t)}{2+\sin(t)}, \cos(t)\right).$$

1. Justifier que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
2. (a) Définir en Python les fonctions `abscisse(t)` et `ordonnee(t)` prenant en paramètre un réel `t` et renvoyant respectivement la valeur de $x(t)$ et de $y(t)$.
   (b) Tracer avec Python la courbe $\mathscr{C}$ pour $t \in [-\pi, \pi]$. On pourra utiliser la commande `linspace`.
3. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $f(0)$.
4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $f(\pi)$.

Exercice 30 : Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on note

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad S(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-an^2}.$$

On admet que $I(1)$ converge et vaut $I(1) = \sqrt{\pi}/2$.

1. En posant $u = \sqrt{a}\,t$, montrer que $I(a)$ converge et préciser sa valeur.
2. Montrer que la série $S(a)$ est convergente.
3. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-ax^2}$ sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{e}^{-a(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-an^2}.$$

4. Conclure que $I(a) \leqslant S(a) \leqslant I(a) + 1$.
5. (a) Écrire en langage Python une fonction `somme(N,a)` prenant en paramètre un entier naturel non nul `N` et renvoyant la valeur $S_N(a) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{-an^2}$.
   (b) Comparer $S_{1000}(1)$ avec $I(1)$ et $S(1)$.

Exercice 31 : On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies par

$$f_1(x) = (e^x + e^{-x})\cos(x), \qquad f_2(x) = (e^x - e^{-x})\cos(x),$$
$$f_3(x) = (e^x + e^{-x})\sin(x), \qquad f_4(x) = (e^x - e^{-x})\sin(x).$$

On note $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une famille libre.
2. Montrer que l'application $\varphi : F \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $f \mapsto f'$ est linéaire. Est-ce un endomorphisme de F ?
3. Écrire la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ de F.
4. Calculer le déterminant de φ. Est-ce que φ est un automorphisme de F ?
5. Montrer que φ est diagonalisable en utilisant Python avec les deux fonctions suivantes de la bibliothèque `numpy` : `numpy.linalg.eig` et `numpy.diag`.

Exercice 32 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soient les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ et

$$\begin{cases} x_{n+1} &=& 4x_n - 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} &=& x_n + z_n \\ z_{n+1} &=& x_n - y_n - z_n. \end{cases}$$

   (a) Écrire en langage Python une fonction `suite(n)` prenant en paramètre un entier naturel `n` et retournant le vecteur (x_n, y_n, z_n).

   (b) Déterminer une expression des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 33 : On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^n(t)\,dt.$$

1. Montrer que la suite (w_n) est bornée.
2. Montrer que $w_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$w_{2p+2} + w_{2p} = \frac{2}{2p+1}.$$

4. Écrire en langage Python une fonction `suite(p)` prenant en paramètre un entier naturel `p` et retournant la valeur de w_{2p}.
5. Montrer la suite $(w_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire que $w_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} (2p)^{-1}$.

Exercice 34 : On considère l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. (a) Écrire en langage Python une fonction `lin(x,y,z)` prenant en paramètre un triplet de réels `(x,y,z)` et renvoyant la valeur $u(x,y,z)$.

   (b) En utilisant votre fonction Python, calculer $u^2(x,y,z)$ pour différentes valeurs de $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Calculer A^2. Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ et montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
4. Calculer la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition précédente.

Exercice 35 : Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes

$$A_m = \begin{pmatrix} m+1 & m+1 & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. (a) Écrire en langage Python une fonction `matrice(m)` prenant en paramètre un réel `m` et retournant la matrice A_m.

   (b) Écrire en langage Python une fonction `val(m)` prenant en paramètre un réel `m` et retournant les valeurs propres de la matrice A_m. On pourra utiliser la fonction `numpy.linalg.eig` de la bibliothèque `numpy`.
2. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la matrice A_m est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer A_m^n en fonction d'une matrice diagonale.

Exercice 36 : On considère l'équation différentielle

$$x^2 y' + y = 1. \quad (E)$$

1. Résoudre (E) dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer une expression de la solution $y_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de (E) vérifiant $y(1) = a$.
3. Écrire en langage Python une fonction `sol(a)` prenant en paramètre un réel `a` et retournant le tracé de la fonction y_a sur $]0, 2[$.
4. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier la limite de f en 0^+.
5. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice sans préparation

Exercice 37 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs.

1. Montrer que $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. En déduire que si $\sum u_n^2$ converge, alors $\sum u_n \cdot 2^{-n}$ converge aussi.

Exercice 38 : Montrer que $x\ln(x) - \sin(x)\ln(\sin(x)) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{x^3}{6}\ln(x)$.

Exercice 39 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & & \ddots & 1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(-n)^{n-1}(n+1)}{2}.$$

Exercice 40 : A l'aide de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} 2t\cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ et d'un développement en série entière, calculer la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!16^n}.$$

Exercice 41 : Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 42 : Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{2/3}}$.

Exercice 43 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

Exercice 44 : Résoudre le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 2x \\ y' & = & \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z \\ z' & = & \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z. \end{array} \right.$$

Exercice 45 : Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^n$.

Exercice 46 : Linéariser $\sin^3(x)$ et résoudre $y' + y = \sin^3(x)$.

Exercice 47 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

1. Déterminer le rayon de la série entière définissant la fonction f.
2. Montrer que $g(x) = f(x) + f(1-x) + \ln(x)\ln(1-x)$ est constante sur $]0,1[$.

Exercice 48 : Résoudre le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2x(t) + y(t) \\ y'(t) & = & 2y(t) \\ z'(t) & = & 2x(t) - 3y(t) + 4z(t). \end{array} \right.$$

Exercice 49 : Reconnaitre l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 50 : Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $A + A^{\mathrm{T}}$ est symétrique.
2. Montrer que si $\left(A + A^{\mathrm{T}}\right)^p = 0$, alors A est antisymétrique.

Exercice 51 : On considère sur $\mathbb{R}_+^*$ les équations différentielles

$$y' - y = \frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{x}} \quad (E_1) \quad \text{et} \quad y'' - 2y' + y = \frac{-\mathrm{e}^x}{4x\sqrt{x}}. \quad (E_2)$$

1. Montrer que si y est solution de (E_1), alors y est solution de (E_2).
2. Résoudre (E_1), puis résoudre (E_2).

Exercice 52 : Donner la nature de la conique $x^2 + y^2 - xy = 1$.

Exercice 53 : On considère l'application u définie sur $E = \mathbb{R}_3[X]$ par

$$\forall P \in E, \quad u(P) = X^2 P(-1) + P(1).$$

1. L'application u est-elle un endomorphisme de E ?
2. Donner la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

Exercice 54 : On considère la surface S de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$3x^2+6y^2-2\sqrt{3}xy+z^2=4.$$

Déterminer l'intersection de S avec les plans $x=0$, $y=0$ puis $z=0$.

Exercice 55 :

1. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\operatorname{Arctan}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

2. Donner l'ensemble de définition de

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(2k-1)\frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

puis exprimer f avec les fonctions usuelles.

Exercice 56 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère le polynôme

$$P_n=\sum_{k=0}^{n}X^k=1+X+\cdots+X^n.$$

1. Calculer les racines α_1 et α_2 de P_2. Donner $\alpha_1+\alpha_2$ et $\alpha_1\alpha_2$.
2. Déterminer les racines $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$ du polynôme P_n.
3. En déduire la factorisation du polynôme P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z_k$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}z_k$.

Exercice 57 : Montrer que $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

Exercice 58 : On définit une suite de polynômes (P_n) par $P_0=2$, $P_1=X$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad P_{n+2}(X)=XP_{n+1}(X)-P_n(X).$$

1. Calculer P_2 et P_3.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $z\in\mathbb{C}^*$, on a $P_n\left(z+\dfrac{1}{z}\right)=z^n+\dfrac{1}{z^n}$.
3. Montrer que pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on a $P_n(2\cos(\theta))=2\cos(n\theta)$.
4. Donner les racines de P_1 et P_2, puis étudier le cas général.

Exercice 59 : Pour quelle $\alpha\in\mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(t)}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ?

Exercice 60 : On considère la matrice

$$M=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Si oui, déterminer une matrice diagonale $D\in\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et $P\in\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ telles que $M=PDP^{-1}$.
2. Reprendre les questions précédentes avec $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$.

Exercice 61 : On considère une matrice

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),$$

ainsi que l'application $\varphi:\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\to\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M)=AM$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Exprimer le déterminant de φ en fonction de celui de A.

Exercice 62 :

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 - 2x + 8 \geqslant 7$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Montrer que $A^2 - 2A + 8\mathrm{I}_n = P(D^2 - 2D + 8\mathrm{I}_n)P^{-1}$.
4. En déduire que $\mathrm{Tr}(A^2 - 2A + 8\mathrm{I}_n) \geqslant 7n$.

Exercice 63 : On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 7x. \quad (E)$$

On considère la fonction $g(u,v) = f(u+v, u-3v)$.

1. Montrer que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a la relation
$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u+v, u-3v) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(u+v, u-3v).$$
2. Montrer que si f est solution de (E), alors
$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 7(u+v) \quad (E').$$
3. Résoudre l'équation (E'), puis en déduire les solutions de (E).

Exercice 64 :

1. Déterminer le rayon de convergence R de $S(x) = \sum_{n \geqslant 2} \frac{2x^n}{n^2-1}$.
2. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \frac{2}{n^2-1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}.$$
3. Exprimer $S(x)$ pour $x \in]-R, R[$ avec les fonctions usuelles.

Exercice 65 : On définit l'application $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = MA - AM \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base du noyau et de l'image de f.
3. Écrire la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 66 : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que f est une isométrie vectorielle directe.
2. Montrer que $u = (3,-1,-1)$ est un vecteur invariant de f.
3. Déterminer les caractéristiques de l'isométrie vectorielle f

Exercice 67 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On considère

$$M = \begin{pmatrix} (-1)^X & 1 \\ (-1)^Y & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la probabilité que M soit inversible ?
2. Quelle est la probabilité que 1 soit valeur propre de M ?
3. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
4. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

Exercice 68 : On considère la surface S de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 + 4xz = 1.$$

Déterminer l'intersection de S avec les plans $x = 0$, $y = 0$ puis $z = 0$.

Exercice 69 : On définit $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X], \quad \phi(P,Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0).$$

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer l'orthogonal de $F = \mathrm{Vect}(X^2+1, X^2-X-1)$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de X sur F.

Exercice 70 : On considère l'application u définie sur $E = \mathbb{R}_3[X]$ par

$$\forall P \in E, \quad u(P) = (X^2+1)P''(X) - 2XP'(X).$$

1. L'application u est-elle un endomorphisme de E ?
2. Donner la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

Exercice 71 : On considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(u_n) = 1$.
2. Montrer que $u_n(1-u_n^n) = 1 - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et bornée. En déduire sa limite.

Exercice 72 : On considère $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note $N_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de X_i.
2. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de N_n.
3. Que représente $\bar{X} = N_n/n$? Calculer l'espérance et la variance de $\bar{X}$.

Exercice 73 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que A est diagonalisable, puis la diagonaliser.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 74 : On note $P(X) = X^3 + X^2 - X - 1$ et on considère

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Factoriser le polynôme P et montrer que $P(A) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 75 : On considère la série entière

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-1} x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière S.
2. Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \frac{n}{n^2-1} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n-1}.$$

3. Exprimer $S(x)$ avec les fonctions usuelles.

Concours Centrale-Supélec
Oral de Mathématiques 1

Modalité de l'épreuve : L'épreuve orale de mathématiques 1 se propose d'accueillir les candidats 30 minutes, sans préparation, et de les interroger sur un ou deux exercices portant sur l'ensemble du programme de première et seconde année.

Outre les qualités mathématiques, le jury est attentif à l'autonomie, l'aisance orale, la vivacité et la réactivité des candidats. Plus qu'à une réussite exhaustive et immédiate, il s'attend à ce que les candidat s'exposent leur réflexion organisée, leurs pistes et leurs idées. En cas de présentation satisfaisante, il se réserve la possibilité de donner quelques indices pour débloquer la situation.

Exercice 76 : Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.

Exercice 77 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall t \in]-\pi, \pi], \quad f(t) = |t|.$$

1. Développer f en série de Fourier sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire les valeurs des sommes suivantes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 78 : Écrire la matrice, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection orthogonale sur la droite dirigée par $(1,2,3)$.

Exercice 79 : Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = |\sin(x)|$ sur $]-\pi, \pi[$.

Exercice 80 : Étudier l'endomorphisme de $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ qui à $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de $(X^4-1)P$ par $X^4 - X$.

Exercice 81 : Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On définit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique par

$$\forall t \in]-\pi, \pi], \quad f_\alpha(t) = \cos(\alpha t).$$

1. Représenter la fonction f_α sur $[-2\pi, 2\pi]$ lorsque $\alpha = 1/4$.
2. Démontrer que f_α est paire.
3. Calculer les coefficients de Fourier de f_α.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2}.$$

Exercice 82 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On considère l'application u définie sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in E, \quad u(P) = P\left(\frac{X+1}{2}\right).$$

1. Justifier que u est un endomorphisme de E.
2. Montrer que sa matrice dans la base canonique est triangulaire supérieure.
3. En déduire les valeurs propres de u.
4. Calculer $u((X-1)^k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. En déduire les espaces propres de u.

Exercice 83 : On définit l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 84 :

1. Déterminer le rayon de convergence R et calculer $\sum x^{3n}$ sur $]-R,R[$.
2. Calculer $f(x)=(1-x)\sum x^{3n}$ pour $x\in]-R,R[$.
3. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.
4. Déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}=\frac{a}{3n+1}+\frac{b}{3n+2}.$$
5. Montrer que pour tout $N\in\mathbb{N}$, on a
$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}=\int_0^1\frac{1-x^{3(N+1)}}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x.$$
6. Montrer que
$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^1\frac{x^{3N}}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x=0.$$
7. En déduire la valeur de la série $\sum \dfrac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

Exercice 85 : Pour $(a,b,c)\in\mathbb{R}_+^3$, on définit
$$M(a,b,c)=\begin{pmatrix} a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Pour quel $(a,b,c)\in\mathbb{R}_+^3$, la matrice $M(a,b,c)$ est-elle orthogonale ?
2. Dans ces cas, préciser la nature de la transformation de $\mathbb{R}^3$ qu'elle représente.

Exercice 86 : Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n}$.

Exercice 87 : La matrice A est-elle inversible ? diagonalisable ? trigonalisable ?
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 88 :

1. Montrer qu'il existe un unique triplet $(P_0,P_1,P_2)\in\mathbb{R}_2[X]^3$ tel que
$$\forall (i,j)\in\{0,1,2\}^2,\quad P_i(j)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad i=j\\ 0 & \text{si} \quad i\neq j.\end{cases}$$
2. Montrer que $\mathscr{B}=(P_0,P_1,P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Donner les coordonnées d'un polynôme $P\in\mathbb{R}_2[X]$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 89 : On considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle
$$y''+y=\frac{1}{x^2}.\quad (E)$$

1. Montrer que pour tout $x>0$, les intégrales ci-dessous sont convergentes.
$$\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$
2. Soit $a\in\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une solution particulière de (E) de la forme
$$y(x)=a\cos(x)\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t+a\sin(x)\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$
3. En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 90 : Déterminer la rayon de convergence de $\sum n^{(-1)^n}x^n$.

Exercice 91 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On note $P_n(x)$ le polynôme caractéristique de la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Calculer $P_1(x)$ et $P_2(x)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x)$.
3. Pour $x \in]-2,2[$, on écrit $x = 2\cos(\alpha)$ avec $\alpha \in]0,\pi[$. Montrer que
$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}.$$
4. En déduire les valeurs propres de A_n. Est-elle diagonalisable ?

Exercice 92 : Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 1 & a \\ a & -a & 2a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de M_a.
2. A quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$, la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

Exercice 93 : Déterminer les extremums de $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = x^2 + 4x^3 - 2xy + 3y^2.$$

Exercice 94 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donner par $f(x) = |\sin(x)|$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier.

Exercice 95 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application u définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in E, \quad u(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'.$$

1. Pour quelles valeurs de n, l'application u est-elle un endomorphisme de E ?
2. On suppose dans la suite que $n = 2$.
   a. Écrire la matrice de u dans la base $(1, X, X^2)$.
   b. Déterminer les éléments propres de u.
   c. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 96 : On considère la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donner par

$$\forall x \in [-\pi,\pi[, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \cos(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{k^2}{(4k^2-1)^2}$.

Exercice 97 : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Déterminer l'équation cartésienne d'un plan stable par f.

Exercice 98 : Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x(t) = x'(t) + 2y(t) \\ y(t) = 2x(t) + y'(t). \end{cases}$$

Exercice 99 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1+x^2)y''-2y=0. \quad (E)$$

1. On suppose que $f(x)=\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence non nul et est solution de (E). Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad (n+1)(n+2)a_{n+2}+(n+1)(n-2)a_n=0.$$

2. En déduire que $a_{2n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$.
3. Dans cette question, on suppose que $a_0=0$.
   a. Exprimer $f'(x)$ avec $\mathrm{Arctan}(x)$.
   b. En déduire une expression de $f(x)$ avec les fonctions usuelles.
4. En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 100 : On considère la matrice

$$M=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&0&0&-2\\1&1&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(M)$ et de $\mathrm{Im}(M^{\mathrm{T}})$.
2. Existe-t-il une relation d'inclusion entre ces deux sous-espaces ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(M)$ et de $\mathrm{Ker}(M^{\mathrm{T}})$.
4. Existe-t-il une relation d'inclusion entre ces deux sous-espaces ?

Exercice 101 : Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'-x &= y\\ x+y &= y'+3x.\end{cases}$$

Exercice 102 : Pour $a\in\mathbb{R}$, on définit

$$M_a=\begin{pmatrix}6&2&0\\2&3&0\\a^2-7a&a-7&a\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer les valeurs propres de M_a.
2. Pour quelle valeurs de $a\in\mathbb{R}$ la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

Exercice 103 : Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $B=A^{\mathrm{T}}A$ et $C=AA^{\mathrm{T}}$.

1. Si $X\in\mathbb{R}^n$ vérifie $X^{\mathrm{T}}X=0$, que peut-on dire de X ?
2. Comparer $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Ker}(B)$, $\mathrm{Ker}(A^{\mathrm{T}})$, $\mathrm{Ker}(C)$.
3. Comparer $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Im}(B)$, $\mathrm{Im}(A^{\mathrm{T}})$, $\mathrm{Im}(C)$.
4. Les matrices B et C sont-elles diagonalisables ?
5. Que peut-on dire des valeurs propres de B et C ? Que peut-on dire si A est inversible ?

Exercice 104 : On note $r\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ la rotation d'angle $\theta\in\mathbb{R}$ et d'axe dirigé par un vecteur unitaire $u\in\mathbb{R}^3$.

1. Donner la matrice de r dans une base adaptée.
2. On définit l'application $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x\in\mathbb{R}^3,\quad f(x)=\cos(\theta)x+\sin(\theta)(u\wedge x)+(1-\cos(\theta))(u\mid x)u.$$

   a. Montrer que f est linéaire.
   b. Calculer $f(u)$, puis $f(x)$ pour tout vecteur $x\in\mathbb{R}^3$ orthogonal à u.
   c. Que peut-on en déduire ?

Exercice 105 : Résoudre pour $z\in\mathbb{C}$ l'équation

$$z^6+(7-\mathrm{i})z^3-8-8\mathrm{i}=0.$$

Exercice 106 : Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts avec $n \geqslant 2$. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0,1[$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Après ces n appels, il rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des correspondants qu'il n'a pu joindre la première fois. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de correspondants qu'il aura obtenus au total. Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance.

Exercice 107 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in [0,1]$.
2. Montrer que (x_n) converge vers 0.
3. Déterminer un équivalent de (x_n).

Exercice 108 : On considère deux vecteurs $a, b \in \mathbb{R}^3$ non colinéaires.

1. Quelle est la dimension de $F = \mathrm{Vect}(a,b)$? Donner une base de $F^{\perp}$.
2. La famille $\mathscr{B} = (a, b, a \wedge b)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
3. On considère l'application $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad u(x) = (a \mid x)b + (b \mid x)a.$$
   (a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.
   (c) Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de u.
   (d) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 109 : Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{2^n (n+2)!}$.

Exercice 110 : Déterminer l'ensemble de définition et les variations de la fonction f définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}}{t-1}\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 111 : Montrer qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si sa seule valeur propre est 0.

Exercice 112 : Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice
$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ -1 & 0 & -a \\ a & -a & 1-a \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que M_a est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs propres de M_a.
3. Soit $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $M_a = PDP^{-1}$ avec D diagonale.
   (a) Pour $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note $B' = P^{-1}BP$. Montrer que $M_aB = BM_a$ si et seulement si on a la $DB' = B'D$.
   (b) Expliquer comment trouver les $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M_aB = BM_a$.

Exercice 113 : On considère la droite D d'équation $x = 3$ et $y = 3 - 3z$.

1. Donner un point et un vecteur directeur de D.
2. Déterminer les points réguliers de la surface S d'équation $xy = z^3$.
3. Donner les plans tangents à S qui contiennent D.

Exercice 114 : On note (E) l'équation différentielle $ty'' - (t+1)y' + y = 0$.

1. Montrer que $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ est solution de (E) pour une valeur de $a \in \mathbb{R}$ à préciser.
2. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.
3. Reprendre l'exercice en cherchant les solutions développables en série entière.

Exercice 115 : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note

$$\varphi(P) = (X^2+X)P(-1) + (X^2-X)P(1).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer le noyaux et l'image de φ, puis préciser leur dimension.
3. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

Exercice 116 : On considère l'application $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0,1[$.
2. Montrer que $f(x_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que la fonction f est bijective de $]0,1[$ dans un intervalle J que l'on précisera.
4. En déduire que la limite de la suite (x_n) est 1.
5. Montrer que $1 - x_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 117 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad P((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{aij}{n^2(n+1)^2}.$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 118 : On note $S_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $S_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donner sa dimension.
2. Déterminer les éléments propres de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. On considère l'application $f_A : S_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par
$$\forall M \in S_3(\mathbb{R}), \quad f_A(M) = AM + MA.$$
Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale.
   (a) Montrer que f_A est un endomorphisme de $S_3(\mathbb{R})$.
   (b) Pour $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $M' = P^{-1}MP$. Montrer que $M \in \mathrm{Ker}(f_A)$ si et seulement si $DM' = -M'D$.
   (c) En déduire le noyau de f_A.

Exercice 119 : Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^x - 1}{\ln\left(1-\sqrt{x^2-1}\right)}\,\mathrm{d}x$ converge.

Exercice 120 : Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. On définit les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que les intégrales I et J sont convergentes et que $I = J$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est définie par
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) = \frac{1}{1+t^n}.$$
Calculer $I + J$, puis en déduire les valeurs de I et J.

Exercice 121 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

ainsi que A_n l'évènement « S_n est paire » et $p_n = P(A_n)$.

1. Déterminer la loi de S_n.
2. Calculer p_1, p_2 et p_3.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P(A_{n+1} \mid A_n) = 1 - p \quad \text{et} \quad p_{n+1} = (1-2p)p_n + p.$$

4. Déterminer une relation de récurrence pour (u_n) définie par $u_n = p_n - 1/2$, puis en déduire la limite de la suite (p_n).

Exercice 122 : On considère la fonction $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in [-1,1], \quad f(x,y) = x^2 y + \ln(1+y^2).$$

1. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur $[-1,1]^2$.
2. Déterminer les points critiques de f sur $]-1,1[^2$.
3. La fonction f admet-elle un extremum en $(0,0)$? (Considérer $f(x,x^3)$).
4. Déterminer le minimum et le maximum de f sur $[-1,1]^2$.

Exercice 123 : Soit $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$. A quelle condition 0 est-il valeur propre de la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) ?$$

Exercice 124 : Une urne contient N boules dont pN sont blanches et $(1-p)N$ sont noires où $p \in]0,1[$. On tire $n \in [\![0,N]\!]$ boules sans remise et on note X le nombre de boules blanches tirées.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $P(X=k)$ avec des coefficients binomiaux.
2. Soit $k \in X(\Omega)$. Déterminer $\lim\limits_{N\to+\infty} P(X=k)$. Quelle loi reconnait-on ?

Exercice 125 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Calculer A_n^k pour $k \in \mathbb{N}^*$ et

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 126 : Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$M(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de $M(a)$.
2. On suppose que $(a-1)^2 - 4 < 0$. Montrer que $M(a)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Montrer que si $(a-1)^2 - 4 > 0$, alors $M(a)$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $M(3)$ est semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

5. Montrer que $M(-1)$ est semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 127 : On considère l'équation différentielle

$$x^2y''+6xy'+4y=\frac{1}{1+2x}. \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée sur $]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$ en cherchant les solutions de la forme $x\mapsto x^\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{N}$.
2. La fonction $x\mapsto(1+2x)^{-1}$ est-elle développable en série entière ?
3. Résoudre (E) en cherchant une solution particulière développable en série entière.
4. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $]-1/2,1/2[$ autres que la solution développable en série entière ?

Exercice 128 : On admet que pour tout $k\in\mathbb{N}$ et $x\in]-1,1[$, on a

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence et calculer la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant k}\binom{n}{k}x^n$.
2. On désigne par A_n l'évènement « un couple a n enfants » et on suppose que l'on a $P(A_n)=(1-p)p^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $p\in]0,1[$. On suppose que la probabilité d'avoir un garçon est $1/2$.
   (a) Calculer la probabilité d'avoir au moins un enfant.
   (b) Soit $(k,n)\in\mathbb{N}^2$. Calculer la probabilité qu'un couple ait k garçons sachant qu'il a n enfants.
   (c) Soit $k\in\mathbb{N}$. Calculer la probabilité d'avoir k garçons.

Exercice 129 : On considère l'application $f:D\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=xy(1-x-y) \quad \text{où} \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 \mid x+y\leqslant 1\}.$$

1. Représenter la partie D.
2. Montrer que f admet un maximum sur D que l'on déterminera.

Exercice 130 : On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= y+z\\ y' &= x\\ z' &= x+y+z.\end{cases}$$

1. Déterminer la matrice associée à ce système. Est-elle diagonalisable ?
2. Résoudre le système.
3. Existe-t-il des solutions bornées sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 131 : On considère la matrice

$$A=\begin{pmatrix}4&1&-3\\8&3&-5\\-2&-1&1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice

$$T=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&8\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

4. Calculer A^n pour $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 132 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad P(X=n+1)=\frac{3}{n+1}P(X=n).$$

1. Calculer $P(X=1)$ et $\mathrm{E}(X)$.
2. En utilisant $\mathrm{E}(X(X-1))$, calculer $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 133 : On note $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $t^n \mathrm{e}^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
2. En déduire que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
3. Calculer I_n pour $n \in [\![0,8]\!]$.
4. Pour $(P,Q) \in E^2$, on note
$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
   (a) Montrer que cette intégrale est convergente.
   (b) Montrer que φ est un produit scalaire.
   (c) Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (d) Calculer la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 134 : On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice
$$T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$
4. Déterminer les matrices qui commutent avec T, puis avec A.

Exercice 135 : On lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois une pièce équilibrée et on note F_n la fréquence de « Face » obtenus. Combien de lancers faut-il réaliser pour obtenir
$$P(0,4 \leqslant F_n \leqslant 0,6) \geqslant 0,95\ ?$$

Exercice 136 : On considère la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. La matrice M est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que la matrice M est semblable à la matrice
$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$
3. Donner une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = PTP^{-1}$.

Exercice 137 : On considère sur $I =]0,1[$ l'équation différentielle
$$x^2y'' + 4xy' + 2y = \frac{1}{1-x}. \qquad (E)$$

On note (H) l'équation homogène associée à (E).

1. Déterminer les solutions de (H) de la forme $y(x) = x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. En déduire toutes les solutions de (H) sur I.
3. Déterminer les solutions $f(x)$ de (E) développable en série entière.
4. Exprimer f avec les fonctions usuelles. (Calculer $g'(x)$ où $g(x) = x^2 f(x)$).
5. Donner toutes les solutions de (E) sur I.

Exercice 138 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
2. Trouver une matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ qui commute avec A.
3. Montrer que l'ensemble E des matrices qui commutent avec A est un sous-espace vectoriel dont on donnera la dimension.
4. Montrer que E est stable pour le produit matriciel.
5. Trouver une matrice $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = A$.

Exercice 139 : Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $a \in \mathbb{C}^*$. On considère $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{i,j} = a^{i+j-2}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

1. On suppose $n = 3$. Déterminer les valeurs propres de A, puis montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.
2. Déterminer $\mathrm{rang}(A)$. En déduire une valeur propre de A et sa multiplicité.
3. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.
4. Pour quelles valeurs $a \in \mathbb{C}^*$, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 140 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On place n boules dans n tiroirs et on note Y_n le nombre de tiroirs non vides. Calculer l'espérance de Y_n.

Exercice 141 : Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a^n n!}{n^n}$ en fonction de $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 142 : Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale dans $\mathbb{R}^3$ par rapport à la droite D d'équation $2x = 6y = 3z$.

Concours Centrale-Supélec
Oral de Mathématiques 2

Modalité de l'épreuve : L'épreuve orale de mathématiques 2 porte également sur le programme de mathématiques des deux années de TSI, ainsi que sur le programme d'informatique pour tous. Les candidats disposent de 30 minutes de préparation, avant de dévoiler leur programme ou graphique à l'écran s'il y a lieu, puis d'exposer leurs résultats pendant 30 minutes. Rappelons que tous les sujets comportent des questions d'algorithmique et de programmation en Python et les candidats sont vivement encouragés à y consacrer environ dix minutes de leur préparation. Les candidats avaient cette année le choix entre les environnements PYZO et SPYDER. Les étudiants sont toujours guidés pour les premières questions afin d'utiliser au mieux le temps imparti.

Les programmes et algorithmes, même simples, doivent obligatoirement être rédigés en Python et non sur une calculatrice. Les calculs numériques éventuels peuvent avantageusement être également effectués avec Python. L'aide Python standard est à la disposition des candidats près des ordinateurs.

Le jury rappelle qu'il est inutile de reprendre au tableau les calculs effectués en préparation.

Exercice 143 : Soit $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$. On note

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & 0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & 0 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_5(\mathbb{R}).$$

1. Écrire une fonction Python qui renvoie la matrice M ci-dessus associée à la liste $[a_1, \dots, a_4]$.
2. Conjecturer l'expression du polynôme caractéristique de M.
3. Démontrer votre conjecture.

Exercice 144 : On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $(a_0, b_0, c_0, d_0) \in \mathbb{C}^4$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2}, \quad c_{n+1} = \frac{c_n + d_n}{2}, \quad d_{n+1} = \frac{a_n + d_n}{2}.$$

On considère également la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C}).$$

1. Programmer une fonction Python qui renvoie la liste $[a_n, b_n, c_n, d_n]$ pour un quadruplet $(a_0, b_0, c_0, d_0) \in \mathbb{C}^4$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ donnés.
2. Conjecturer le comportement des suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ et (d_n).
3. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de J.
4. La matrice J est-elle diagonalisable ?
5. Démontrer votre conjecture de la question 2.

Exercice 145 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = |\sin(x)|.$$

1. Montrer que f est paire et périodique.
2. Montrer que f est égale à sa série de Fourier.
3. Calculer les coefficients de Fourier de f.
4. En déduire la valeur des séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.
5. Écrire un programme en Python qui donne la première valeur $N \in \mathbb{N}^*$ telle que

$$0,499 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{4n^2-1} \leqslant 0,5.$$

Exercice 146 : On définit deux suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = a > 0$, $b_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{b_n}\right), \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{1}{a_n}\right).$$

1. Programmer une fonction Python qui renvoie $[[a_0, \dots, a_n], [b_0, \dots, b_n]]$ pour tout réel $a > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$ donné.
2. Conjecturer le comportement des suites (a_n) et (b_n).
3. Étudier la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$.
4. Montrer $a_n \geqslant \sqrt{a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
6. En déduire la limite des suites (a_n) et (b_n).

Exercice 147 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

1. Écrire une fonction Python qui renvoie la liste $[I_0, I_1, \dots, I_n]$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Placer les 10 premières valeurs sur un graphique.
3. Conjecturer le comportement de la suite (I_n) en $+\infty$.
4. Démontrer votre conjecture.

Exercice 148 : Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On note

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Écrire une fonction Python qui renvoie la matrice M ci-dessus associée à la liste $[a_0, \dots, a_{n-1}]$.
2. Conjecturer l'expression du polynôme caractéristique de M.
3. Démontrer votre conjecture.

Exercice 149 : On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation $x^2 - yz = \frac{1}{4}$.

1. Représenter $\mathscr{S}$ en utilisant Python.
2. Donner l'équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en un point (x_0, y_0, z_0) de $\mathscr{S}$.
3. Existe-t-il un plan tangent contenant la droite d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & -\frac{1}{2} \\ 2x - z & = & -2. \end{array}\right.$$

Exercice 150 : On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 2x - y.$$

1. Déterminer le gradient de f en tout point. En quels points ce gradient est-il nul ?
2. On note $\mathscr{C}$ la courbe du plan d'équation $f(x, y) = 0$.
   a. Représenter $\mathscr{C}$ en utilisant Python.
   b. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en un point (x_0, y_0) de $\mathscr{C}$.
   c. Déterminer les points (x_0, y_0) de $\mathscr{C}$ où la tangente est orthogonale au vecteur (x_0, y_0).

Exercice 151 : On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(2 - \mathrm{e}^{-1/x})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Conjecturer le comportement de $x \mapsto x f(x)$ en $+\infty$ à l'aide de Python.
3. Démontrer votre conjecture.
4. Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(2 - \mathrm{e}^{-1/k}\right).$$

Exercice 152 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction 1-périodique définie par

$$\forall x\in[0,1[,\quad f(x)=\exp(x).$$

1. Tracer la courbe représentative de f sur $[-2,2]$ en utilisant Python.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2+1}$.

Exercice 153 : Soit (a_n) une suite réelle. On définit (u_n) par $u_0\in\mathbb{R}$ et la relation de récurrence $2u_{n+1}+u_n=2a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Exprimer u_n en fonction de n et u_0 si la suite (a_n) est nulle.
2. On suppose que $a_n=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   (a) Écrire un programme en Python retournant les 20 premiers termes positifs de (u_n) pour une valeur donnée de u_0.
   (b) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n=u_n-2/3$ est géométrique.
   (c) En déduire une expression de u_n en fonction de n et u_0.
3. On revient au cas général.
   (a) Exprimer u_n en fonction de u_0 et $a_0,\dots,a_n$.
   (b) En déduire que si (a_n) converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0.

Exercice 154 : Si L est une liste de valeurs entières, écrire

(i) une fonction f_1 retournant le nombre de valeurs négatives ou nulles de L, puis son nombre de valeurs positives,

(ii) une fonction f_2 retournant la somme des cubes des valeurs négatives plus la somme des carrés des valeurs positives,

(iii) une fonction f_3 retournant le maximum de L et les indices correspondant à cette valeur.

Exercice 155 : Pour $x\in\mathbb{R}$, on note $\phi(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de ϕ.
2. En utilisant Python, tracer la courbe représentative de ϕ.
3. Linéariser la fonction $t\mapsto\sin^3(t)$.
4. Montrer que ϕ est développable en série entière.

Exercice 156 : On considère la fonction $f:[0,1]^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=x^2+xy-y^2-5x-y.$$

1. Représenter la surface représentative de f en utilisant Python.
2. Déterminer les extremums de f sur $[0,1]^2$.

Exercice 157 : On considère la fonction vectorielle f définie par

$$f(t)=\left(\frac{t}{1+t^3},\frac{t^2}{1+t^3}\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée en utilisant Python.
3. Rappeler la formule permettant de calculer la longueur de $\mathscr{C}$ pour $t\geqslant 0$.
4. Donner une valeur approchée de cette longueur.

Exercice 158 : Soit X un variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $(n,p)\in\mathbb{N}\times]0,1[$.

1. Programmer en Python une fonction récursive qui renvoie $\binom{n}{k}$.
2. Programmer une fonction `rep(t,n,p)` qui retourne $P(X\leqslant t)$ où $t\in\mathbb{R}$.
3. Tracer la fonction de répartition de X sur l'intervalle $[-1,n+1]$ pour différentes valeurs de n et p.

Exercice 159 : On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Conjecturer sa valeur en utilisant Python.
3. Démontrer votre conjecture.

Exercice 160 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^{\pi} \ln\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}\cos(nx)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer une valeur approchée de l'intégrale I_{1000} avec une erreur de 10^{-3} à l'aide de Python.
2. Montrer que les intégrales I_n et J_n convergent pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer I_n en fonction de J_n à l'aide d'une intégration par parties.
4. Calculer J_0 et calculer $J_{n+1} - J_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que l'on a l'égalité
$$\int_0^{\pi} \ln(\sin(nx))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \ln(\cos(nx))\,\mathrm{d}x.$$
6. En déduire la valeur de I_n et de J_n.

Exercice 161 : On considère $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les applications définies par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = \mathrm{Tr}(M)\mathrm{I}_n \quad \text{et} \quad \psi(M) = M - \mathrm{Tr}(M)\mathrm{I}_n.$$

1. Écrire une fonction Python qui renvoie la trace d'une matrice.
2. Écrire des fonctions Python qui permettent de calculer $\varphi(M)$ et $\psi(M)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$ et que $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n^2 - 1$.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(\psi)$ et en déduire que ψ est bijective.
5. Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(\psi)$ et déterminer la dimension de $E_1(\psi)$.