CHAPITRE 10

Isométries d'un espace euclidien

Jérôme VON BUHREN
http://vonbuhren.free.fr

Lycée Blaise Pascal - TSI

Ce chapitre est le prolongement du chapitre précédent sur les espaces préhilbertiens. Nous allons étudier les endomorphismes d'un espace euclidien préservant la norme des vecteurs : les isométries. Nous nous intéresserons notamment à leur classification en petite dimension. Finalement, nous verrons un résultat important sur la réduction des matrices symétriques réelles, puis nous l'appliquerons à l'étude d'objets de nature géométrique : les coniques.

Les isométries en dimension 2 et 3 sont souvent utilisées en science pour passer des coordonnées dans un repère orthonormé à celles dans un autre repère orthonormé.

Dans tout le chapitre, on fixe un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \in \mathbb{N}$.

Définition (Matrice orthogonale)

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si elle vérifie la relation $A^{\mathrm{T}} A = \mathrm{I}_n$.

Remarques 1

a) La définition revient à dire que les colonnes (ou les lignes) de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

b) Par définition, une matrice orthogonale A est inversible et on a $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$.

Définition (Groupe orthogonal d'ordre n)

Le groupe orthogonal d'ordre n est l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On le note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n)$.

Exemple 1

Voici quelques exemples de matrices orthogonales

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}), \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

Théorème 1

L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, i.e.

(i) La matrice I_n appartient à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,

(ii) Pour tout $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on a $A^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,

(iii) Pour tout $(A, B) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})^2$, on a $AB \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 1

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Une base $\mathscr{C}$ de E est orthonormée si et seulement si la matrice de passage $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ est orthogonale.

Proposition 2

Si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A) = \pm 1$.

Définition (Matrice orthogonale positive ou négative)

Une matrice orthogonale $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est dite positive (ou directe) si $\det(A) = 1$. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est négative (ou indirecte).

Définition (Groupe spécial orthogonal d'ordre n)

Le groupe spécial orthogonal d'ordre n est l'ensemble des matrices orthogonales positives de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On le note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SO}(n)$.

Remarque 2

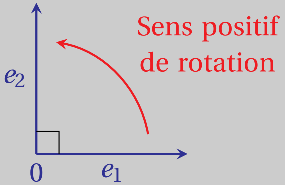
Le théorème 1 reste valable si on remplace $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ par $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

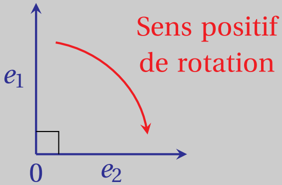
Définition (Espace euclidien orienté)

Un espace euclidien orienté est un espace euclidien dans lequel on a choisi une base orthonormée $\mathscr{C}$ de E.

Remarque 3

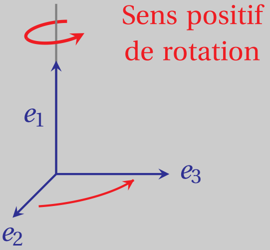
Autrement dit, pour orienter un espace euclidien, on choisit une base orthonormée de celui-ci. Dans le plan, choisir une orientation revient à choisir un sens positif de rotation du plan.

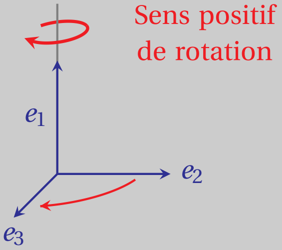




Remarque 3

Dans l'espace, choisir une orientation revient à choisir un sens positif de rotation autour de la demi-droite dirigée par le premier vecteur d'une base orthonormée.





On constate qu'il n'y a que deux orientations possibles pour un espace euclidien.

Définition (Base directe et indirecte)

Soit E un espace euclidien orienté par une base orthonormée $\mathscr{C}$. Une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E est dite

(i) directe si la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ est de déterminant 1.

(ii) indirecte si la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ est de déterminant -1.

Exemple 2

Si l'espace $\mathbb{R}^3$ est orienté par la base canonique (i, j, k), alors les bases $(i, j, k), (j, k, i)$ et (k, i, j) sont directes, tandis que les bases (i, k, j), (k, j, i) et (j, i, k) sont indirectes.

Définition (Isométrie vectorielle)

Un endomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ est une isométrie vectorielle si φ conserve la norme des vecteurs, i.e.

$$\forall x \in E, \quad \|\varphi(x)\| = \|x\|.$$

Exemple 3

Les applications $\pm \mathrm{Id}_E \in \mathscr{L}(E)$ sont des isométries vectorielles.

Définition (Groupe orthogonal d'un espace euclidien)

Le groupe orthogonal de l'espace euclidien E, noté $\mathrm{O}(E)$, est l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Théorème 2

L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ est un groupe, i.e.

(i) L'endomorphisme Id_E appartient à $\mathrm{O}(E)$,

(ii) Pour tout $u \in \mathrm{O}(E)$, l'endomorphisme u est un isomorphisme et $u^{-1} \in \mathrm{O}(E)$,

(iii) Pour tout $(u, v) \in \mathrm{O}(E)^2$, on a $u \circ v \in \mathrm{O}(E)$.

Théorème de caractérisation des isométries vectorielles

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) L'application φ est une isométrie vectorielle.

(ii) L'application φ conserve le produit scalaire, i.e.

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad (\varphi(x) \mid \varphi(y)) = (x \mid y).$$

(iii) L'image d'une base orthonormée de E par φ est une base orthonormée.

(iv) L'image de toute base orthonormée de E par φ est une base orthonormée.

Proposition 3

Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $u \in \mathscr{L}(E)$. L'endomorphisme u est une isométrie vectorielle si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est orthogonale.

Remarque 4

Ainsi, une fois que l'on a fixé une base orthonormée de E, les éléments de $\mathrm{O}(E)$ correspondent bijectivement avec les éléments de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 4

Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par une isométrie vectorielle $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $F^\perp$ est stable par u.

Proposition 5

Si $u \in \mathrm{O}(E)$, alors $\det(u) = \pm 1$.

Définition (Isométrie vectorielle positive ou négative)

Une isométrie vectorielle $u \in \mathrm{O}(E)$ est dite positive (ou directe) si $\det(u) = 1$. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est négative (ou indirecte).

Définition (Groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien)

Le groupe spécial orthogonal de l'espace euclidien E est l'ensemble des isométries vectorielles positives de E. On le note $\mathrm{SO}(E)$.

Remarque 5

Le théorème 2 reste valable si on remplace $\mathrm{O}(E)$ par $\mathrm{SO}(E)$.

Définition (Symétrie orthogonale)

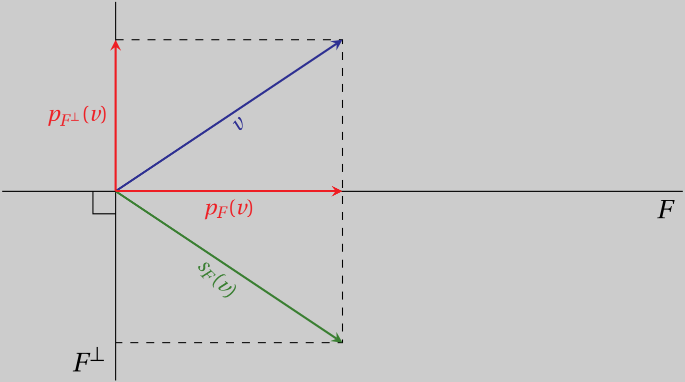
Soit F un sous-espace vectoriel de E. La symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie $s_F : E \to E$ par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$.

Remarque 6

On a $s_F = p_F - p_{F^\perp} = 2p_F - \mathrm{Id}_E$.

Illustration

On peut se représenter la symétrie orthogonale d'un vecteur avec le schéma ci-dessous.



Exemple 4

Dans le chapitre précédent, on a vu que la projection orthogonale sur

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

dans $\mathbb{R}^3$ est définie par

$$p_H(x, y, z) = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3}\right).$$

On en déduit que

$$s_H(x, y, z) = \left(\frac{x - 2y - 2z}{3}, \frac{-2x + y - 2z}{3}, \frac{-2x - 2y + z}{3}\right).$$

Proposition 6

Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.

Définition (Réflexion)

Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Dans cette partie, on suppose que E est un plan euclidien orienté par une base orthonormée $\mathscr{C} = (i, j)$.

Proposition 7

Soit $u \in \mathrm{SO}(E)$ une isométrie positive. Il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E, on a

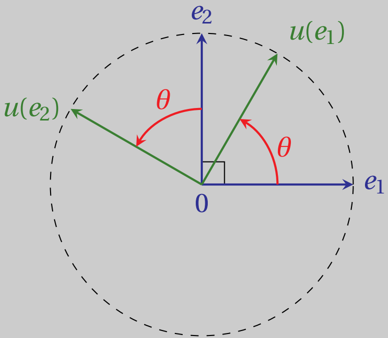
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Illustration

Si $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$, on a par définition les relations

$$\begin{cases} u(e_1) & = & \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \\ u(e_2) & = & -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2 \end{cases}$$

On en en déduit que u est une rotation d'angle θ.



Remarque 7

En particulier, on vérifie dans la démonstration que

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

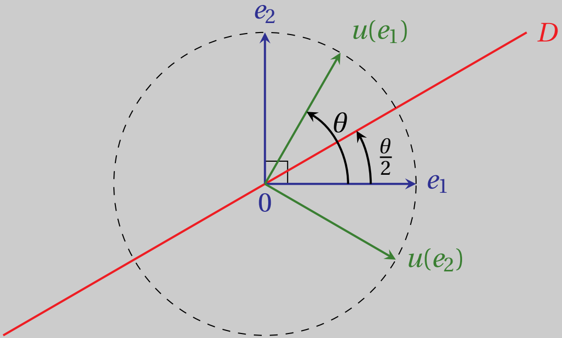
Proposition 8

Soit $u \in \mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$ une isométrie négative. Pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E, il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Illustration

Comme dans le cas précédent, en notant $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$, on peut représenter la situation sur le graphique ci-dessous. On en en déduit que u est une réflexion dont l'axe D est tournée de $\dfrac{\theta}{2}$ par rapport à la droite $\mathrm{Vect}(e_1)$.



Remarque 8

En particulier, on vérifie dans la démonstration que

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarque 9

Si on change l'orientation du plan choisi au début, le réel θ est remplacé par son opposé dans les deux propositions précédentes. (Changer l'orientation revient à changer le sens positif de rotation choisi).

Conclusion

Lorsque E est un plan euclidien, alors

a) les éléments de $\mathrm{SO}(E)$ sont les rotations ;

b) les éléments de $\mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$ sont les réflexions.

Dans cette partie, on suppose que E est un espace euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée $\mathscr{C} = (i, j, k)$.

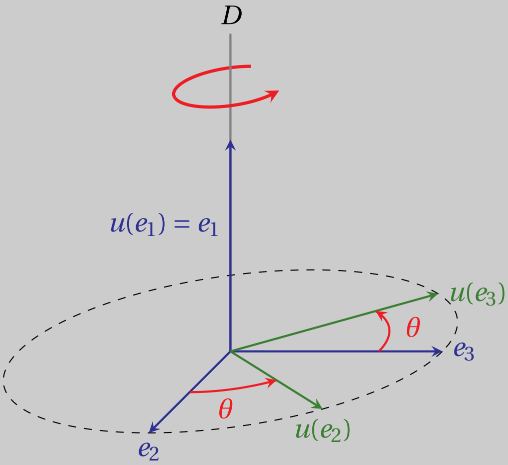
Proposition 9

Soit $u \in \mathrm{SO}(E)$ une isométrie positive. Il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Illustration

En notant $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ on en déduit que u est la rotation d'axe D dirigé par le vecteur e_1 et d'angle θ.



Proposition 10

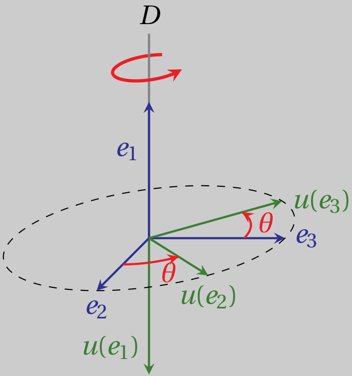
Soit $u \in \mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$ une isométrie négative. Il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Illustration

En notant $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on en déduit que l'isométrie u est la composée commutative entre

- la rotation d'axe D dirigé par e_1 et d'angle θ ;
- la réflexion par rapport au plan $D^\perp = \text{Vect}(e_2, e_3)$.



Remarque 10

Dans le cas où l'angle θ de la rotation est nulle, l'isométrie négative u est simplement la réflexion par rapport au plan $D^{\perp} = \text{Vect}(e_2, e_3)$.

Proposition 11

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 5

Les sous-espaces propres de la matrice symétrique réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sont} \quad E_0 = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_2 = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui sont bien orthogonaux.

Théorème spectral

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Il existe une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1} = PDP^{\mathrm{T}}.$$

Remarque 11

Autrement dit, une matrice symétrique réelle est diagonalisable, a des valeurs propres réelles et on peut choisir la matrice de passage dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

ATTENTION

Si la matrice A est symétrique avec des coefficients non réels, alors elle n'est pas nécessairement diagonalisable. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$$

est symétrique, mais elle n'est pas diagonalisable.

Dans cette partie, on suppose que E est un espace euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée $\mathscr{C} = (i, j, k)$. On souhaite étudier un élément $u \in \mathrm{O}(E)$. On commence par déterminer si u est une isométrie positive ou négative en calculant son déterminant.

V.A.1 - Isométrie positive

D'après le cours, on sait qu'il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme u est la rotation d'axe D dirigé par e_1 et d'angle θ. La méthode ci-dessous permet de déterminer ses caractéristiques.

Méthode : Étude d'une isométrie positive de l'espace

On suppose que $u \neq \mathrm{Id}_E$ (sinon $u = \mathrm{Id}_E$ et il n'y a pas d'étude à faire).

1) On détermine l'axe D en utilisant que $D = E_1(u) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - u)$.
   On fixe un vecteur e_1 unitaire dans D.
2) Pour déterminer l'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de la rotation, on utilise la relation
   $$\mathrm{Tr}(u) = 1 + 2\cos(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{Tr}(u) - 1}{2}.$$
   On en déduit θ en utilisant que le signe de $\sin(\theta)$ est le même que celui du nombre $\det_{\mathscr{C}}(e_1, x, u(x))$ où $x \in E \setminus D$ est un vecteur quelconque.
3) Pour déterminer les vecteurs e_2 et e_3, on choisit un vecteur unitaire e_2 orthogonal à e_1, puis on pose $e_3 = e_1 \wedge e_2$.

Exemple 6

Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ dont la matrice dans $\mathscr{C} = (i, j, k)$ est

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

Nous allons déterminer les éléments caractéristiques de cette isométrie. On vérifie que $\det(u) = \det(A) = 1$, donc u est une isométrie positive.

1) On obtient par le calcul que $D = E_1(u) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - u) = \mathrm{Vect}(i + j)$, donc on pose
$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j).$$

Exemple 6

2) Si $\theta \in \mathbb{R}$ est l'angle de la rotation u, on a

$$\operatorname{Tr}(u) = 1 + 2\cos(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\operatorname{Tr}(u) - 1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

De plus, on sait que le nombre $\sin(\theta)$ est de même signe que

$$\det_{\mathscr{C}}(e_1, j, u(j)) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{4} > 0,$$

donc u est la rotation d'axe D dirigé par $i + j$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Exemple 6

3) Si l'on souhaite déterminer une base orthonormée directe $\mathscr{B}$ adaptée à l'isométrie u, on peut prendre $e_2 = k$ qui est orthogonale à e_1 et

$$e_3 = e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j).$$

V.A.2 - Isométrie négative

D'après le cours, on sait qu'il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme u est la composée commutative entre :

- la rotation d'axe D dirigé par e_1 et d'angle θ ;
- la réflexion par rapport au plan $D^\perp = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$.

La méthode ci-dessous permet de déterminer ses caractéristiques.

Méthode : Étude d'une isométrie négative de l'espace

On suppose que $u \neq -\mathrm{Id}_E$ (sinon $u = -\mathrm{Id}_E$ et il n'y a pas d'étude à faire).

1) On détermine l'axe D en utilisant que $D = E_{-1}(u) = \mathrm{Ker}(-\mathrm{Id}_E - u)$.
   On fixe un vecteur e_1 unitaire dans D.
2) Pour déterminer l'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de la rotation, on utilise la relation

   $$\mathrm{Tr}(u) = -1 + 2\cos(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{Tr}(u)+1}{2}.$$

   On en déduit θ en utilisant que le signe de $\sin(\theta)$ est le même que celui du nombre $\det_{\mathscr{C}}(e_1, x, u(x))$ où $x \in E \setminus D$ est un vecteur quelconque.
3) Pour déterminer les vecteurs e_2 et e_3, on choisit un vecteur unitaire e_2 orthogonal à e_1, puis on pose $e_3 = e_1 \wedge e_2$.

Exemple 7

Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ dont la matrice dans $\mathscr{C} = (i, j, k)$ est

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $\det(u) = \det(A) = -1$, donc u est une isométrie négative.

1) On obtient par le calcul que $D = E_{-1}(u) = \mathrm{Ker}(-\mathrm{Id}_E - u) = \mathrm{Vect}(i - 4k)$, donc on pose

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(i - 4k).$$

Exemple 7

2) Si $\theta \in \mathbb{R}$ est l'angle de la rotation, on a que

$$\mathrm{Tr}(u) = -1 + 2\cos(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{Tr}(u)+1}{2} = \frac{7/9+1}{2} = \frac{8}{9}.$$

De plus, on sait que le nombre $\sin(\theta)$ est de même signe que

$$\det_{\mathscr{C}}(e_1, i, u(i)) = \frac{1}{9\sqrt{17}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{16}{9\sqrt{17}} > 0,$$

donc u est la composée commutative entre :

- la rotation d'axe D dirigé par $i - 4k$ et d'angle $\mathrm{Arccos}(8/9)$;
- la réflexion par rapport au plan $D^{\perp} = \mathrm{Vect}(j, 4i + k)$.

Exemple 7

3) Si l'on souhaite déterminer une base orthonormée directe $\mathscr{B}$ adaptée à l'isométrie u, on peut prendre $e_2 = j$ qui est orthogonale à e_1 et

$$e_3 = e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{\sqrt{17}}(4i + k).$$

On considère une matrice symétrique réelle $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on souhaite diagonaliser de sorte que la matrice de passage P soit orthogonal.

Méthode : Déterminer la matrice de passage orthogonale

1) On détermine les sous-espaces propres de A.
2) On construit des bases orthonormées de chacun des sous-espaces propres (en utilisant, par exemple, l'algorithme de Gram-Schmidt).
3) La matrice P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs des bases orthonormées trouvées.

Exemple 8

Nous allons diagonaliser la matrice symétrique réelle ci-dessous avec une matrice de passage orthogonale.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(x) = (x+3)(x-3)^2.$$

Les sous-espaces propres de la matrice A sont

$$E_3(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{-3}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 8

En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base de $E_3(A)$ ci-dessus, on en déduit qu'une base orthonormée de $E_3(A)$ est

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right).$$

En normalisant le vecteur dans la base de $E_{-3}(A)$ ci-dessus, on obtient une base orthonormée de $E_{-3}(A)$ avec le vecteur

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Exemple 8

On a donc $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

De plus, on a par construction que $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, donc

$$P^{-1} = P^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

On se place dans un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé (O, i, j).

Définition (Conique)

Une conique dans $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant une équation de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ vérifie $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Proposition 12

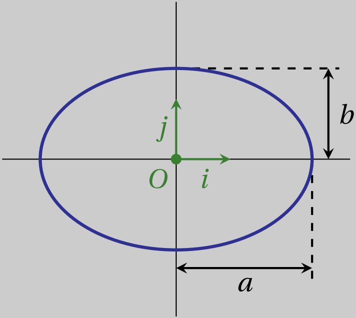
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

(i) La conique admettant pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ est une ellipse dont le centre est l'origine.

(ii) La conique admettant pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole dont le centre est l'origine.

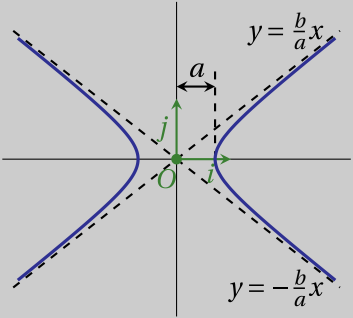
Illustration

On peut représenter les deux coniques de la proposition.



Ellipse d'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$



Hyperbole d'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Méthode : Étudier une conique

On considère une conique de $\mathscr{P}$ dont l'équation est

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

1) On met l'équation sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0.$$

2) Comme la matrice A est symétrique réelle, on peut déterminer une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.

Méthode : Étudier une conique

3) On détermine l'équation de la conique dans le repère (O, e_1, e_2) où (e_1, e_2) est la base orthonormée de vecteurs propres que l'on vient de calculer. Pour cela on procède au changement de variable

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \underset{\text{Transposition}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^{\mathrm{T}}$$

dans l'équation de départ. On obtient ainsi une équation simple dans le nouveau repère orthonormé (O, e_1, e_2) qui nous permet d'identifier la conique.

Exemple 9

On souhaite étudier la conique $\mathscr{C}_1$ de $\mathscr{P}$ dont l'équation est

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y + 6 = 0.$$

On commence par réécrire cette équation sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 6 = 0.$$

Comme la matrice A est symétrique réelle, on peut lui appliquer la méthode de diagonalisation vue dans la partie précédente. On trouve que les valeurs propres de A sont 2 et 4 et que les sous-espaces propres respectifs associés sont

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_4(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 9

Ainsi, on peut écrire $D = P^{-1}AP$ avec les matrices

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}).$$

On définit donc les vecteurs

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j) \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i + j).$$

Exemple 9

Pour obtenir l'équation de la conique dans le repère (O, e_1, e_2), on effectue le changement de variable

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

dans l'équation de la conique. On obtient

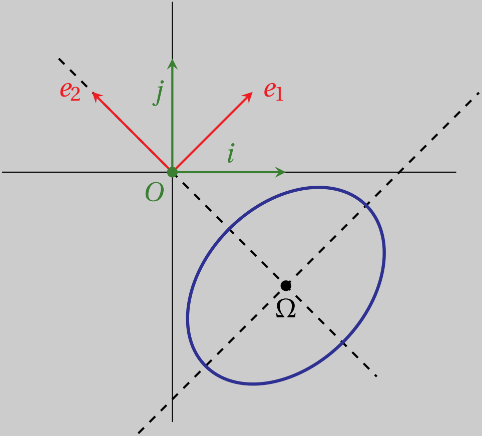
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 6 = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^{\mathrm{T}} A P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 8 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 6 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 8\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 6 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad 2u^2 + 4v^2 + 8\sqrt{2}v + 6 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad u^2 + 2(v + \sqrt{2})^2 = 1.
\end{aligned}$$

Exemple 9

Ainsi la conique étudiée est une ellipse. Son centre Ω à pour coordonnée $(0, -\sqrt{2})$ dans le repère (O, e_1, e_2), donc $(1, -1)$ dans le repère (O, i, j).

Exemple 9

On peut tracer la conique $\mathscr{C}_1$ en utilisant son équation dans le repère (O, e_1, e_2).



La conique $\mathscr{C}_1$

Exemple 10

On souhaite étudier la conique $\mathscr{C}_2$ de $\mathscr{P}$ dont l'équation est

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y = 0.$$

On commence par réécrire cette équation sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & -50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Les valeurs propres de A sont 0 et 25 et les sous-espaces propres associés sont

$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{25}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exemple 10

Ainsi, on peut écrire $D = P^{-1}AP$ avec les matrices

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}).$$

On définit donc les vecteurs

$$e_1 = \frac{1}{5}(3i + 4j) \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{5}(-4i + 3j).$$

Exemple 10

Pour obtenir l'équation de la conique dans le repère (O, e_1, e_2), on effectue le changement de variable

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

dans l'équation de la conique. On obtient

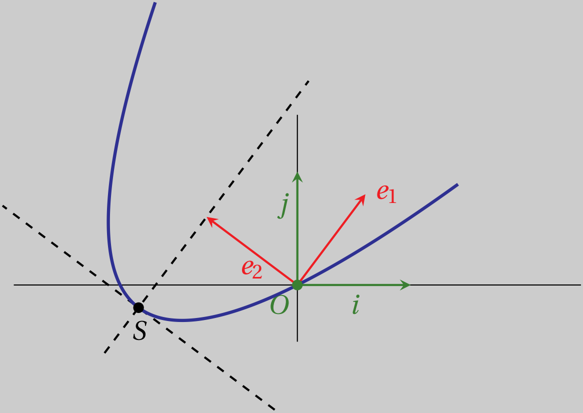
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & -50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^{\mathrm{T}} A P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & -50 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25 & -50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow 25v^2 - 25u - 50v = 0 \\
&\Leftrightarrow u = v^2 - 2v.
\end{aligned}$$

Exemple 10

Ainsi la conique étudiée est une parabole. Son sommet S a pour coordonnée $(-1,1)$ dans le repère (O, e_1, e_2), donc $(-7/5, -1/5)$ dans le repère (O, i, j).

Exemple 10

On peut tracer la conique $\mathscr{C}_2$ en utilisant son équation dans le repère (O, e_1, e_2).



La conique $\mathscr{C}_2$

Conclusion

Pour terminer, voici la liste exhaustive des types de coniques.

a) L'ensemble vide (exemple : $x^2 + y^2 = -1$),
b) Un point (exemple : $x^2 + y^2 = 0$),
c) Une droite (exemple : $x^2 = 0$),
d) Deux droites parallèles (exemple : $x^2 = 1$),
e) Deux droites sécantes (exemple : $x^2 - y^2 = 0$),
f) Une parabole (exemple : $x^2 - y = 0$),
g) Une ellipse (exemple : $x^2 + 2y^2 = 1$),
h) Une hyperbole (exemple : $x^2 - 2y^2 = 1$).