CHAPITRE 10
Isométries d'un espace euclidien

Exercice 1 :

1. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice M. Supposons que la matrice M est orthogonale. D'après le cours, on a les relations
$$\|C_1\| = \|C_2\| = \|C_3\| = 1 \quad \text{et} \quad (C_1 \mid C_2) = (C_1 \mid C_3) = (C_2 \mid C_3) = 0.$$
La relation $\|C_1\| = 1$ implique $a = 0$, puis on déduit de la relation $(C_1 \mid C_2) = 0$ que $b = -\sqrt{2}$. De plus, on a
$$\left\{\begin{array}{rcl} (C_1 \mid C_3) &=& 0 \\ (C_2 \mid C_3) &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \sqrt{3}c+\sqrt{3}e &=& 0 \\ \sqrt{2}c+\sqrt{2}d-\sqrt{2}e &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} d &=& -2c \\ e &=& -c. \end{array}\right.$$
En injectant dans la relation $\|C_3\| = 1$, on trouve $c = \pm 1$. Finalement, les valeurs possibles pour (a,b,c,d,e) sont $(0,-\sqrt{2},-1,2,1)$ et $(0,-\sqrt{2},1,-2,-1)$. Réciproquement, on vérifie que ces deux solutions conviennent.
2. Il suffit de calculer le déterminant de M pour les deux solutions précédentes. On trouve que $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $(a,b,c,d,e) = (0,-\sqrt{2},-1,2,1)$.

Exercice 2 : Notons $(C_1,\dots,C_n)$ les colonnes d'une telle matrice. D'après le cours, on a que $(C_1,\dots,C_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Le vecteur C_1 étant unitaire, on a nécessairement $C_1 = \begin{pmatrix}\pm 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Comme C_2 est unitaire et est orthogonal à C_1, on a $C_2 = \begin{pmatrix}0 & \pm 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. En itérant, on trouve que le matrices qui conviennent sont les matrices de la forme
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n.$$

Exercice 3 : Notons $(C_1,\dots,C_n)$ les colonnes d'une telle matrice. D'après le cours, on a que $(C_1,\dots,C_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Comme les vecteurs $C_1,\dots,C_n$ sont orthogonaux deux à deux et que leurs coefficients sont positifs, chacun d'eux ne peut avoir qu'une unique composante non-nulle. Comme ils sont unitaires, le coefficient correspondant vaut nécessairement 1. Ainsi les matrices qui conviennent sont les matrices dont les colonnes sont exactement à l'ordre près
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

Exercice 4 :

1. Pour $(P,Q) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P+\mu Q) &= (\lambda P+\mu Q)(1-X) \\ &= \lambda P(1-X)+\mu Q(1-X) \\ &= \lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q), \end{aligned}$$
donc l'application φ est linéaire.
2. Pour $P \in E$, on a en posant $u = 1-t$ dans l'intégrale
$$\|\varphi(P)\|^2 = \int_0^1 P(1-t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 P(u)^2\,du = \|P\|^2,$$
donc $\varphi \in \mathrm{O}(E)$.
3. Pour $P \in E$, on a
$$(\varphi\circ\varphi)(P) = \varphi(P(1-X)) = P(1-(1-X)) = P(X),$$
donc φ est la symétrie par rapport au sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(\varphi+\mathrm{Id}_E)$. Si l'on note $P = aX^2+bX+c \in E$, on a
$$\varphi(P) = P(1-X) = a(1-X)^2+b(1-X)+c = aX^2-(2a+b)X+(a+b+c).$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow \varphi(P) = P \\ &\Leftrightarrow aX^2 - (2a+b)X + (a+b+c) = aX^2 + bX + c \\ &\Leftrightarrow a = a \text{ et } -(2a+b) = b \text{ et } a+b+c = c \\ &\Leftrightarrow b = -a, \end{aligned}$$

donc $F = \mathrm{Vect}(X(1-X), 1)$. De même, trouve $G = \mathrm{Vect}(2X-1)$.

4. D'après la question précédente, les valeurs propres de φ sont $1, 1, -1$. Donc, on a $\det(\varphi) = 1 \times 1 \times (-1) = -1$.

Exercice 5 : On commence par vérifier que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires.

- D'après le théorème du rang, on a

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) + \dim \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E).$$

- Si $y \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$, alors

$$u(y) = y \quad \text{et} \quad \exists x \in E, \ \ y = u(x) - x,$$

donc, comme u est une isométrie, on a

$$\begin{aligned} \|y\|^2 = (y \mid y) = (y \mid u(x) - x) &= (y \mid u(x)) - (y \mid x) \\ &= (u(y) \mid u(x)) - (y \mid x) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $y = 0$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.

On a donc montré que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$. Il reste à vérifier que ces deux espaces sont orthogonaux. Si $(x, y) \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$, alors

$$u(x) = x \quad \text{et} \quad \exists z \in E, \ \ y = u(z) - z,$$

donc, comme u est une isométrie, on a

$$\begin{aligned} (x \mid y) = (x \mid u(z) - z) &= (x \mid u(z)) - (x \mid z) \\ &= (u(x) \mid u(z)) - (x \mid z) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ sont orthogonaux.

Exercice 6 :

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. En prenant la normée, on obtient

$$\|x\| = \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

Comme $x \neq 0$, on en déduit $\lambda = \pm 1$.

2. Si u est diagonalisable, on a $E = E_1 \oplus E_{-1}$, donc u est une symétrie. Il suffit de vérifier que E_1 et E_{-1} sont orthogonaux pour montrer que u est une symétrie orthogonale. Si $(x, y) \in E_1 \times E_{-1}$, alors $u(x) = x$ et $u(y) = -y$. Par suite,

$$(x \mid y) = (u(x) \mid u(y)) = (x \mid -y) = -(x \mid y),$$

donc $(x \mid y) = 0$. Finalement, E_1 et E_{-1} sont orthogonaux.

Exercice 7 :

(i) L'endomorphisme u est la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

(ii) L'endomorphisme u est la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(\sqrt{3}i + j)$.

(iii) L'endomorphisme u est la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(2i + j)$.

(iv) L'endomorphisme u est la rotation d'angle $-\mathrm{Arccos}(5/13)$.

Exercice 8 :

(i) u est la rotation d'axe dirigé par $3i + j + k$ et d'angle $\theta = -\mathrm{Arccos}(-5/6)$.

(ii) L'endomorphisme u est la rotation d'axe dirigé par $i + k$ et d'angle $\theta = \pi/2$.

(iii) L'endomorphisme u est la rotation d'axe dirigé par $i + 4j + k$ et d'angle $\theta = \pi$.

Exercice 9 :

(i) L'endomorphisme u est la composée commutative entre :
- la rotation d'axe D dirigé par $i - 4j$ et d'angle $-\mathrm{Arccos}(8/9)$;
- la réflexion par rapport au plan $D^\perp = \mathrm{Vect}(k, 4i + j)$.

(ii) L'endomorphisme u est la réflexion par rapport au plan $\mathrm{Vect}(i + j, \sqrt{6}j - k)$.

(iii) L'endomorphisme u est la composée commutative entre :
- la rotation d'axe D dirigé par $i - 3j - k$ et d'angle $\theta = -\mathrm{Arccos}(5/6)$;
- la réflexion par rapport au plan $D^\perp = \mathrm{VectVect}(3i + j, i + k)$.

Exercice 10 :

1. On a les équivalences
$$A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}A = \mathrm{I}_3 \Leftrightarrow a^2 + 2b^2 = 1 \text{ et } 2ab + b^2 = 0.$$
Ainsi, on obtient
$$A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (a,b) \in \left\{(1,0), (-1,0), \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}.$$
2. On a
   - Si $(a,b) = (1,0)$, alors $u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
   - Si $(a,b) = (-1,0)$, alors $u = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
   - Si $(a,b) = (1/3, -2/3)$, alors l'isométrie u est la réflexion par rapport au plan vectoriel $\mathrm{Vect}((1,-1,0),(0,1,-1))$.
   - Si $(a,b) = (-1/3, 2/3)$, alors l'isométrie u est la rotation d'axe dirigé par le vecteur $(1,1,1)$ et d'angle π.

Exercice 11 :

(i) On peut prendre
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(ii) On peut prendre
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) On peut prendre
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 :

1. Comme on peut écrire $M(M^{\mathrm{T}}M) = \mathrm{I}_n$, on en déduit que la matrice $M^{\mathrm{T}}M$ est inversible et que l'on a $M = (M^{\mathrm{T}}M)^{-1}$. On en déduit avec les propriétés de la transposition que
$$M^{\mathrm{T}} = \left((M^{\mathrm{T}}M)^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left((M^{\mathrm{T}}M)^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(M^{\mathrm{T}}M\right)^{-1} = M,$$
donc la matrice M est symétrique.
2. Par le théorème spectral, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que
$$M = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$
Comme M est symétrique, on a également $MM^{\mathrm{T}}M = M^3$. On en déduit que
$$MM^{\mathrm{T}}M = \mathrm{I}_n \quad \Leftrightarrow \quad P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^3 P^{-1} = \mathrm{I}_n \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Diag}(\lambda_1^3, \dots, \lambda_n^3) = \mathrm{I}_n.$$
En identifiant les coefficients, on obtient $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$, donc $D = \mathrm{I}_n$. On en déduit finalement que $A = PDP^{-1} = P\mathrm{I}_n P^{-1} = \mathrm{I}_n$.

Exercice 13 :

1. On obtient le résultat avec un calcul direct.
2. Par le théorème spectral, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$M = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$
Comme M est symétrique, on a également $MM^{\mathrm{T}} = M^2$. On en déduit que
$$\mathrm{Tr}\left(MM^{\mathrm{T}}\right) = \mathrm{Tr}(M^2) = \mathrm{Tr}(PD^2P^{-1}) = \mathrm{Tr}(D^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$
On obtient donc le résultat avec la première question.

Exercice 14 :

1. On remarque avec les propriétés de la transposition que
$$M^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}}A - AA^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}} - (AA^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} - (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A - AA^{\mathrm{T}} = M,$$
donc la matrice M est symétrique. Comme la matrice M est à coefficients réels, on en déduit qu'elle est diagonalisable par le théorème spectral. Finalement, avec les propriétés de la trace, on a
$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}A - AA^{\mathrm{T}}) = \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}A) - \mathrm{Tr}(AA^{\mathrm{T}}) = \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}A) - \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}A) = 0.$$
2. Si A et A^{T} commutent, alors on a $M = A^{\mathrm{T}}A - AA^{\mathrm{T}} = 0$, donc $\mathrm{Sp}(M) = \{0\} \subset \mathbb{R}_+$. Réciproquement, si $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$, alors par le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que
$$M = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$
Comme les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont positives, on a
$$\mathrm{Tr}(M) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = 0.$$
On en déduit que $D = 0$, donc $M = PDP^{-1} = 0$. Comme $M = A^{\mathrm{T}}A - AA^{\mathrm{T}}$, on conclut que $A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}}$.

Exercice 15 :

1. C'est le théorème spectral appliqué à la matrice M.
2. Comme la matrice P est orthogonal, on a $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$. On en déduit que
$$Y^{\mathrm{T}}Y = (P^{-1}X)^{\mathrm{T}}(P^{-1}X) = X^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}}P^{-1}X = X^{\mathrm{T}}PP^{-1}X = X^{\mathrm{T}}X.$$
3. En posant $Y = P^{-1}X$, on a
$$X^{\mathrm{T}}AX = X^{\mathrm{T}}PDP^{-1}X = (P^{-1}X)^{\mathrm{T}}D(P^{-1}X) = Y^{\mathrm{T}}DY.$$
De plus, en notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, on a
$$\lambda_1(Y^{\mathrm{T}}Y) = \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \leqslant Y^{\mathrm{T}}DY = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \leqslant \lambda_n \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \lambda_n(Y^{\mathrm{T}}Y).$$
On obtient l'inégalité souhaitée en utilisant la seconde question.

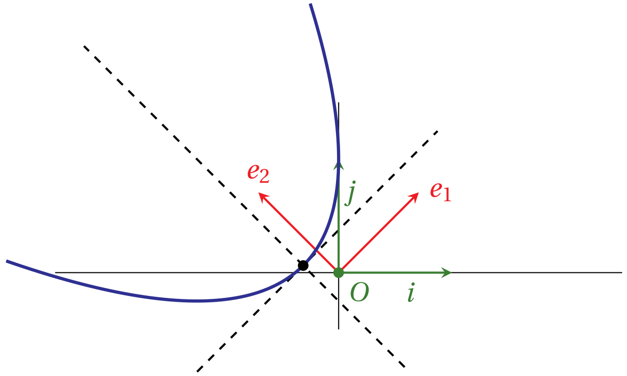
Exercice 16 :

1. Comme la matrice B est symétrique réelle, on peut appliquer le théorème spectral. Il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$B = P\,\mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)P^{-1}.$$
On en déduit que $A = B^2 = P\,\mathrm{Diag}(\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2)P^{-1}$, donc les valeurs propres de A sont positives.
2. Comme la matrice A est symétrique réelle, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que
$$A = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}.$$
En posant $B = P\,\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})P^{-1}$, on a $B^2 = A$. De plus, comme on a la relation $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$, on a en notant $D = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$
$$B^{\mathrm{T}} = (PDP^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (P^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}} = PDP^{\mathrm{T}} = B,$$
donc B est symétrique réelle.

Exercice 17 :

(i) La conique $\mathscr{C}_1$ est l'ensemble vide.

(ii) Dans le repère (O, e_1, e_2) où
$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j) \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i + j),$$
l'équation de la conique $\mathscr{C}_2$ devient
$$2u^2 + \frac{u - 5v}{\sqrt{2}} + 1 = 0 \Leftrightarrow v = \frac{2\sqrt{2}}{5}u^2 + \frac{1}{5}u + \frac{\sqrt{2}}{5}.$$
On conclut que la conique $\mathscr{C}_2$ est une parabole dont le sommet a pour coordonnée $(-5/16, 1/16)$ dans le repère (O, i, j).



La conique $\mathscr{C}_2$

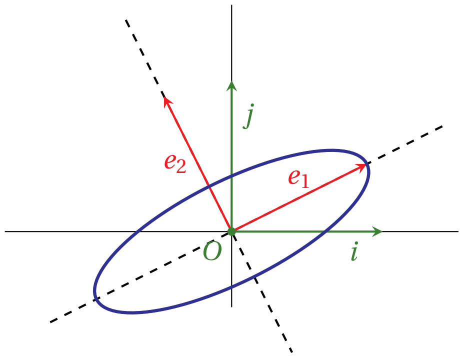
(iii) Dans le repère (O, e_1, e_2) où

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2i + j) \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-i + 2j),$$

l'équation de la conique $\mathscr{C}_3$ devient

$$5u^2 + 45v^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow u^2 + 9v^2 = 1.$$

Ainsi, la conique $\mathscr{C}_3$ est une ellipse de centre O.



La conique $\mathscr{C}_3$

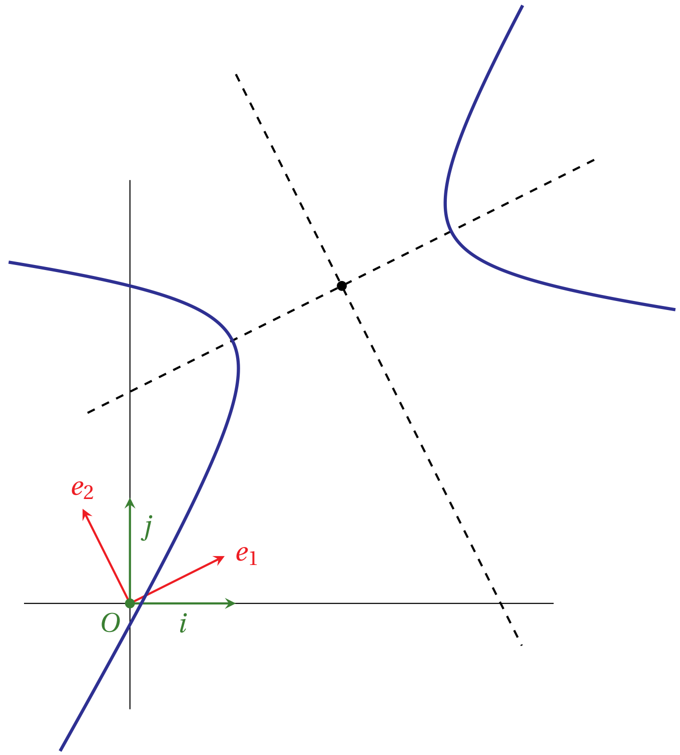
(iv) Dans le repère (O, e_1, e_2) où

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2i + j) \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-i + 2j),$$

l'équation de la conique $\mathscr{C}_4$ devient

$$3u^2 - 7v^2 - \frac{42}{\sqrt{5}}u + \frac{56}{\sqrt{5}}v + 3 = 0 \Leftrightarrow 3\left(u - \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 - 7\left(v - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = 4.$$

Ainsi, la conique $\mathscr{C}_4$ est une hyperbole dont le centre a pour coordonnée $(2,3)$ dans le repère (O, i, j).



La conique $\mathscr{C}_4$