CHAPITRE 10
Isométries d'un espace euclidien

I - Matrices orthogonales

Exercice 1 : Soit $(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5$. On considère la matrice

$$M=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{2} & c\\ a & \sqrt{2} & d\\ \sqrt{3} & b & e\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer les éléments $(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5$ tels que $M\in\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les éléments $(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5$ tels que $M\in\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2 : Déterminer les matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 : Déterminer les matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs.

II - Isométries vectorielles

Exercice 4 : On considère $E=\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\forall (P,Q)\in E^2,\quad (P\mid Q)=\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit l'application $\varphi : E\to E$ par $\varphi(P)=P(1-X)$.

1. Montrer que $\varphi\in\mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que $\varphi\in\mathrm{O}(E)$.
3. Montrer que φ est une symétrie et déterminer ses caractéristiques.
4. Calculer le déterminant de φ.

Exercice 5 : Soient E un espace euclidien et $u\in\mathrm{O}(E)$. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}_E)$ sont des supplémentaires orthogonaux.

Exercice 6 : Soit E un espace euclidien et soit $u\in\mathrm{O}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(u)\subset\{-1,1\}$.
2. Montrer que si u est diagonalisable, alors u est une symétrie orthogonale.

III - Classification des isométries vectorielles

Exercice 7 : Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B}=(i,j)$. Étudier l'endomorphisme $u\in\mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$(i)\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix},\quad (ii)\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix},\quad (iii)\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix},\quad (iv)\ \frac{1}{13}\begin{pmatrix}5 & 12\\ -12 & 5\end{pmatrix}.$$

Exercice 8 : Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B}=(i,j,k)$. Dans chacun des cas suivants, montrer que l'endomorphisme $u\in\mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est donnée ci-dessous est une isométrie positive et préciser ses éléments caractéristiques.

$$(i)\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix},\quad (ii)\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{2} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix},\quad (iii)\ \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-8 & 4 & 1\\ 4 & 7 & 4\\ 1 & 4 & -8\end{pmatrix}.$$

Exercice 9 : Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B}=(i,j,k)$. Dans chacun des cas suivants, montrer que l'endomorphisme $u\in\mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est donnée ci-dessous est une isométrie négative et préciser ses éléments caractéristiques.

$$(i)\ \frac{1}{9}\begin{pmatrix}7 & 4 & 4\\ 4 & -8 & 1\\ -4 & -1 & 8\end{pmatrix},\quad (ii)\ \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1 & \sqrt{6}\\ 1 & 3 & -\sqrt{6}\\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2\end{pmatrix},\quad (iii)\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & -2 & -2\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Exercice 10 : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$.
2. Étudier l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est A pour chacun des couples trouvés.

IV - Réduction des matrices symétriques réelles

Exercice 11 : Diagonaliser les matrices symétriques réelles suivantes avec une matrice de passage orthogonale.

$$(i)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (iii)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 : On considère une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $MM^{\mathrm{T}}M = \mathrm{I}_n$.

1. Montrer que M est une matrice symétrique.
2. En déduire que $M = \mathrm{I}_n$.

Exercice 13 : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont on note les coefficients $(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Montrer que
$$\mathrm{Tr}\left(MM^{\mathrm{T}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2.$$
2. On suppose que M est symétrique et on note $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ ses valeurs propres. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

Exercice 14 : On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $M = A^{\mathrm{T}}A - AA^{\mathrm{T}}$.

1. Montrer que M est diagonalisable et calculer $\mathrm{Tr}(M)$.
2. Montrer que les matrices A et A^{T} commutent si et seulement si $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$.

Exercice 15 : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On note $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de M et on suppose que $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

1. Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$ avec
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$
2. On note $Y = P^{-1}X$ où $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $X^{\mathrm{T}}X = Y^{\mathrm{T}}Y$.
3. Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a
$$\lambda_1(X^{\mathrm{T}}X) \leqslant X^{\mathrm{T}}AX \leqslant \lambda_n(X^{\mathrm{T}}X).$$

Exercice 16 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

1. Montrer que s'il existe une matrice symétrique $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$, alors les valeurs propres de A sont positives.
2. Montrer la réciproque.

Exercice 17 : Soit $\mathscr{P}$ un plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j). Étudier les coniques de $\mathscr{P}$ définies par les équations suivantes dans le repère (O, i, j).

(i) $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 - 3x - y + 3 = 0$,

(ii) $\mathscr{C}_2 : x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$,

(iii) $\mathscr{C}_3 : 13x^2 - 32xy + 37y^2 - 5 = 0$,

(iv) $\mathscr{C}_4 : x^2 + 8xy - 5y^2 - 28x + 14y + 3 = 0$.