CHAPITRE 10
Isométries d'un espace euclidien

Plan du chapitre

Introduction

Ce chapitre est le prolongement du chapitre précédent sur les espaces préhilbertiens. Nous allons étudier les endomorphismes d'un espace euclidien préservant la norme des vecteurs : les isométries. Nous nous intéresserons notamment à leur classification en petite dimension. Finalement, nous verrons un résultat important sur la réduction des matrices symétriques réelles, puis nous l'appliquerons à l'étude d'objets de nature géométrique : les coniques.

Les isométries en dimension 2 et 3 sont souvent utilisées en science pour passer des coordonnées dans un repère orthonormé à celles dans un autre repère orthonormé.

Dans tout le chapitre, on fixe un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \in \mathbb{N}$.

I - Matrices orthogonales

I.A - Généralités

Définition (Matrice orthogonale) : On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si elle vérifie la relation $A^{\mathrm{T}} A = \mathrm{I}_n$.

Remarques 1 :

a) La définition revient à dire que les colonnes (ou les lignes) de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

b) Par définition, une matrice orthogonale A est inversible et on a $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$.

Définition (Groupe orthogonal d'ordre n) : Le groupe orthogonal d'ordre n est l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On le note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n)$.

Exemple 1 : Voici quelques exemples de matrices orthogonales

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}), \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

Théorème 1 : L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, i.e.

(i) La matrice I_n appartient à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,

(ii) Pour tout $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on a $A^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,

(iii) Pour tout $(A, B) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})^2$, on a $AB \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 1 : Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Une base $\mathscr{C}$ de E est orthonormée si et seulement si la matrice de passage $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ est orthogonale.

I.B - Matrices orthogonales positives et négatives

Proposition 2 : Si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A) = \pm 1$.

Définition (Matrice orthogonale positive ou négative) : Une matrice orthogonale $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est dite positive (ou directe) si $\det(A) = 1$. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est négative (ou indirecte).

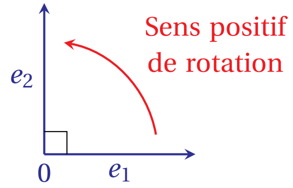
Définition (Groupe spécial orthogonal d'ordre n) : Le groupe spécial orthogonal d'ordre n est l'ensemble des matrices orthogonales positives de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On le note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SO}(n)$.

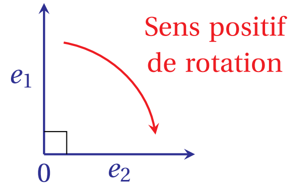
Remarque 2 : Le théorème 1 reste valable si on remplace $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ par $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

I.C - Orientation de l'espace euclidien

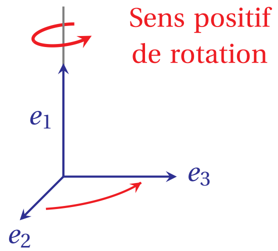
Définition (Espace euclidien orienté) : Un espace euclidien orienté est un espace euclidien dans lequel on a choisi une base orthonormée $\mathscr{C}$ de E.

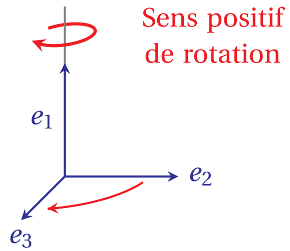
Remarque 3 : Autrement dit, pour orienter un espace euclidien, on choisit une base orthonormée de celui-ci. Dans le plan, choisir une orientation revient à choisir un sens positif de rotation du plan.





Dans l'espace, choisir une orientation revient à choisir un sens positif de rotation autour de la demi-droite dirigée par le premier vecteur d'une base orthonormée.





On constate qu'il n'y a que deux orientations possibles pour un espace euclidien.

Définition (Base directe et indirecte) : Soit E un espace euclidien orienté par une base orthonormée $\mathscr{C}$. Une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E est dite

(i) directe si la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ est de déterminant 1.

(ii) indirecte si la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ est de déterminant -1.

Exemple 2 : Si l'espace $\mathbb{R}^3$ est orienté par la base canonique (i, j, k), alors les bases $(i, j, k), (j, k, i)$ et (k, i, j) sont directes, tandis que les bases (i, k, j), (k, j, i) et (j, i, k) sont indirectes.

II - Isométries vectorielles

II.A - Généralités

Définition (Isométrie vectorielle) : Un endomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ est une isométrie vectorielle si φ conserve la norme des vecteurs, i.e.

$$\forall x \in E, \quad \|\varphi(x)\| = \|x\|.$$

Exemple 3 : Les applications $\pm \mathrm{Id}_E \in \mathscr{L}(E)$ sont des isométries vectorielles.

Définition (Groupe orthogonal d'un espace euclidien) : Le groupe orthogonal de l'espace euclidien E, noté $\mathrm{O}(E)$, est l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Théorème 2 : L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ est un groupe, i.e.

(i) L'endomorphisme Id_E appartient à $\mathrm{O}(E)$,

(ii) Pour tout $u \in \mathrm{O}(E)$, l'endomorphisme u est un isomorphisme et $u^{-1} \in \mathrm{O}(E)$,

(iii) Pour tout $(u, v) \in \mathrm{O}(E)^2$, on a $u \circ v \in \mathrm{O}(E)$.

Théorème de caractérisation des isométries vectorielles : Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) L'application φ est une isométrie vectorielle.

(ii) L'application φ conserve le produit scalaire, i.e.

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (\varphi(x) \mid \varphi(y)) = (x \mid y).$$

(iii) L'image d'une base orthonormée de E par φ est une base orthonormée.

(iv) L'image de toute base orthonormée de E par φ est une base orthonormée.

Proposition 3 : Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $u \in \mathscr{L}(E)$. L'endomorphisme u est une isométrie vectorielle si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est orthogonale.

Remarque 4 : Ainsi, une fois que l'on a fixé une base orthonormée de E, les éléments de $\mathrm{O}(E)$ correspondent bijectivement avec les éléments de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 4 : Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par une isométrie vectorielle $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $F^\perp$ est stable par u.

II.B - Isométries vectorielles positives et négatives

Proposition 5 : Si $u \in \mathrm{O}(E)$, alors $\det(u) = \pm 1$.

Définition (Isométrie vectorielle positive ou négative) : Une isométrie vectorielle $u \in \mathrm{O}(E)$ est dite positive (ou directe) si $\det(u) = 1$. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est négative (ou indirecte).

Définition (Groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien) : Le groupe spécial orthogonal de l'espace euclidien E est l'ensemble des isométries vectorielles positives de E. On le note $\mathrm{SO}(E)$.

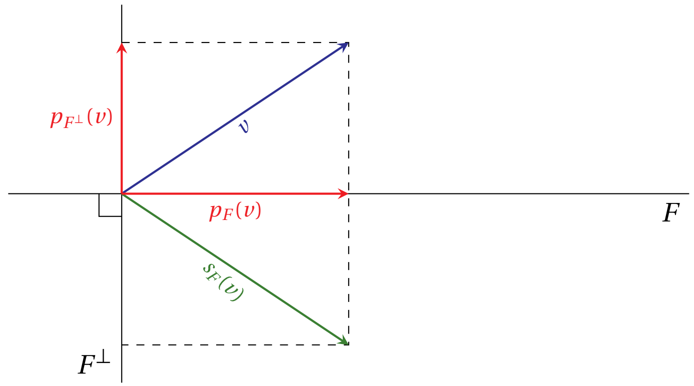
Remarque 5 : Le théorème 2 reste valable si on remplace $\mathrm{O}(E)$ par $\mathrm{SO}(E)$.

II.C - Les symétries orthogonales

Définition (Symétrie orthogonale) : Soit F un sous-espace vectoriel de E. La symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie $s_F : E \to E$ par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$.

Remarque 6 : On a $s_F = p_F - p_{F^\perp} = 2p_F - \mathrm{Id}_E$.

Illustration : On peut se représenter la symétrie orthogonale d'un vecteur avec le schéma ci-dessous.



Exemple 4 : Dans le chapitre précédent, on a vu que la projection orthogonale sur

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

dans $\mathbb{R}^3$ est définie par

$$p_H(x, y, z) = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3}\right).$$

On en déduit que

$$s_H(x, y, z) = \left(\frac{x - 2y - 2z}{3}, \frac{-2x + y - 2z}{3}, \frac{-2x - 2y + z}{3}\right).$$

Proposition 6 : Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.

Définition (Réflexion) : Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

III - Classification des isométries vectorielles

III.A - Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Dans cette partie, on suppose que E est un plan euclidien orienté par une base orthonormée $\mathscr{C} = (i, j)$.

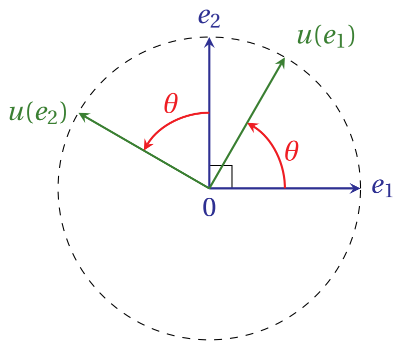
Proposition 7 : Soit $u \in \mathrm{SO}(E)$ une isométrie positive. Il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Illustration : Si $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$, on a par définition les relations

$$\begin{cases} u(e_1) & = & \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \\ u(e_2) & = & -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2 \end{cases}$$

On en en déduit que u est une rotation d'angle θ.



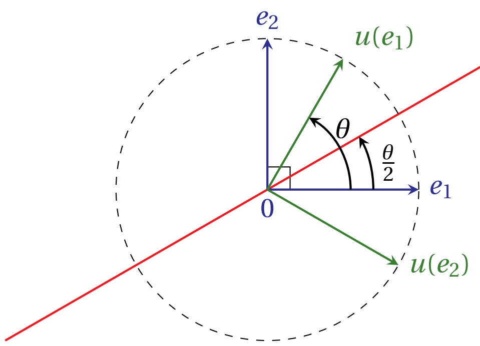
Remarque 7 : En particulier, on vérifie dans la démonstration que

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Proposition 8 : Soit $u \in \mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$ une isométrie négative. Pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E, il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Illustration : Comme dans le cas précédent, en notant $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$, on peut représenter la situation sur le graphique ci-dessous. On en en déduit que u est une réflexion dont l'axe D est tournée de $\dfrac{\theta}{2}$ par rapport à la droite $\mathrm{Vect}(e_1)$.



Remarque 8 : En particulier, on vérifie dans la démonstration que

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarque 9 : Si on change l'orientation du plan choisi au début, le réel θ est remplacé par son opposé dans les deux propositions précédentes. (Changer l'orientation revient à changer le sens positif de rotation choisi).

Conclusion : Lorsque E est un plan euclidien, alors

a) les éléments de $\mathrm{SO}(E)$ sont les rotations ;

b) les éléments de $\mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$ sont les réflexions.

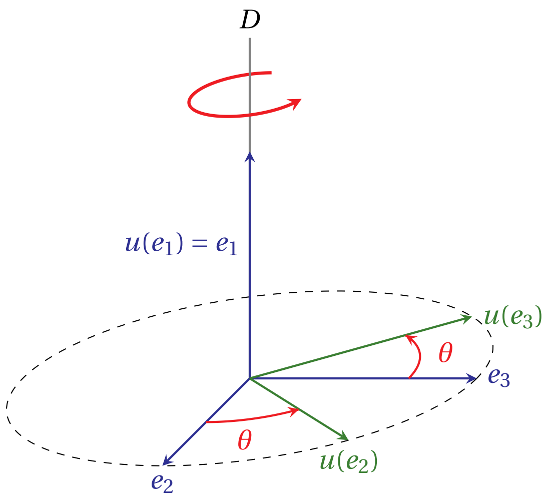
III.B - Isométries vectorielles en dimension 3

Dans cette partie, on suppose que E est un espace euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée $\mathscr{C} = (i, j, k)$.

Proposition 9 : Soit $u \in \mathrm{SO}(E)$ une isométrie positive. Il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Illustration : En notant $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ on en déduit que u est la rotation d'axe D dirigé par le vecteur e_1 et d'angle θ.

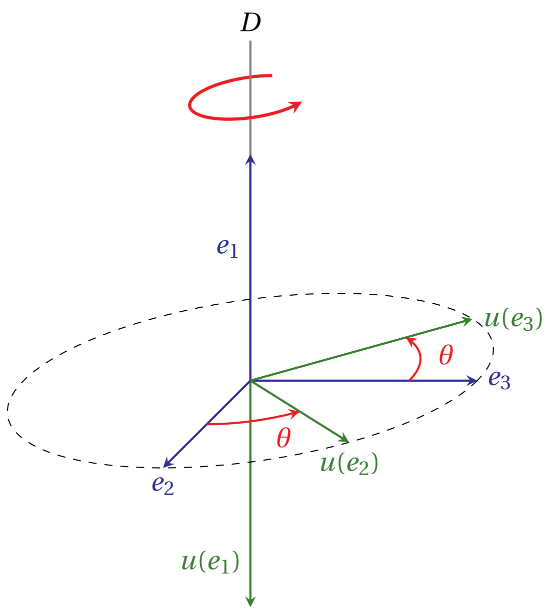


Proposition 10 : Soit $u \in \mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$ une isométrie négative. Il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Illustration : En notant $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on en déduit que l'isométrie u est la composée commutative entre :

- la rotation d'axe D dirigé par e_1 et d'angle θ ;
- la réflexion par rapport au plan $D^\perp = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$.



Remarque 10 : Dans le cas où l'angle θ de la rotation est nulle, l'isométrie négative u est simplement la réflexion par rapport au plan $D^\perp = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$.

IV - Réduction des matrices symétriques réelles

Proposition 11 : Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 5 : Les sous-espaces propres de la matrice symétrique réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sont} \quad E_0 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui sont bien orthogonaux.

Théorème spectral : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Il existe une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1} = PDP^{\mathrm{T}}.$$

Remarque 11 : Autrement dit, une matrice symétrique réelle est diagonalisable, a des valeurs propres réelles et on peut choisir la matrice de passage dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

ATTENTION : Si la matrice A est symétrique avec des coefficients non réels, alors elle n'est pas nécessairement diagonalisable. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$$

est symétrique, mais elle n'est pas diagonalisable.

V - Méthodes

V.A - Étudier une isométrie vectorielle en dimension 3

Dans cette partie, on suppose que E est un espace euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée $\mathscr{C} = (i, j, k)$. On souhaite étudier un élément $u \in \mathrm{O}(E)$. On commence par déterminer si u est une isométrie positive ou négative en calculant son déterminant.

V.A.1 - Isométrie positive

D'après le cours, on sait qu'il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme u est la rotation d'axe D dirigé par e_1 et d'angle θ. La méthode ci-dessous permet de déterminer ses caractéristiques.

Méthode : Étude d'une isométrie positive de l'espace
On suppose que $u \neq \mathrm{Id}_E$ (sinon $u = \mathrm{Id}_E$ et il n'y a pas d'étude à faire).

1) On détermine l'axe D en utilisant que $D = E_1(u) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - u)$.
On fixe un vecteur e_1 unitaire dans D.

2) Pour déterminer l'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de la rotation, on utilise la relation

$$\mathrm{Tr}(u) = 1 + 2\cos(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{Tr}(u) - 1}{2}.$$

On en déduit θ en utilisant que le signe de $\sin(\theta)$ est le même que celui du nombre $\det_{\mathscr{C}}(e_1, x, u(x))$ où $x \in E \setminus D$ est un vecteur quelconque.

3) Pour déterminer les vecteurs e_2 et e_3, on choisit un vecteur unitaire e_2 orthogonal à e_1, puis on pose $e_3 = e_1 \wedge e_2$.

Exemple 6 : Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ dont la matrice dans $\mathscr{C} = (i, j, k)$ est

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

Nous allons déterminer les éléments caractéristiques de cette isométrie. On vérifie que $\det(u) = \det(A) = 1$, donc u est une isométrie positive.

1) On obtient par le calcul que $D = E_1(u) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - u) = \mathrm{Vect}(i + j)$, donc on pose

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j).$$

2) Si $\theta \in \mathbb{R}$ est l'angle de la rotation u, on a

$$\mathrm{Tr}(u) = 1 + 2\cos(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{Tr}(u) - 1}{2} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

De plus, on sait que le nombre $\sin(\theta)$ est de même signe que

$$\det_{\mathscr{C}}(e_1, j, u(j)) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{4} > 0,$$

donc u est la rotation d'axe D dirigé par $i + j$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

3) Si l'on souhaite déterminer une base orthonormée directe $\mathscr{B}$ adaptée à l'isométrie u, on peut prendre $e_2 = k$ qui est orthogonale à e_1 et

$$e_3 = e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j).$$

V.A.2 - Isométrie négative

D'après le cours, on sait qu'il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme u est la composée commutative entre :

- la rotation d'axe D dirigé par e_1 et d'angle θ ;
- la réflexion par rapport au plan $D^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$.

La méthode ci-dessous permet de déterminer ses caractéristiques.

Méthode : Étude d'une isométrie négative de l'espace
On suppose que $u \neq -\mathrm{Id}_E$ (sinon $u = -\mathrm{Id}_E$ et il n'y a pas d'étude à faire).

1) On détermine l'axe D en utilisant que $D = E_{-1}(u) = \mathrm{Ker}(-\mathrm{Id}_E - u)$.
   On fixe un vecteur e_1 unitaire dans D.
2) Pour déterminer l'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de la rotation, on utilise la relation

$$\mathrm{Tr}(u) = -1 + 2\cos(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{Tr}(u)+1}{2}.$$

   On en déduit θ en utilisant que le signe de $\sin(\theta)$ est le même que celui du nombre $\det_{\mathscr{C}}(e_1, x, u(x))$ où $x \in E \setminus D$ est un vecteur quelconque.
3) Pour déterminer les vecteurs e_2 et e_3, on choisit un vecteur unitaire e_2 orthogonal à e_1, puis on pose $e_3 = e_1 \wedge e_2$.

Exemple 7 : Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ dont la matrice dans $\mathscr{C} = (i, j, k)$ est

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $\det(u) = \det(A) = -1$, donc u est une isométrie négative.

1) On obtient par le calcul que $D = E_{-1}(u) = \mathrm{Ker}(-\mathrm{Id}_E - u) = \mathrm{Vect}(i - 4k)$, donc on pose

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(i - 4k).$$

2) Si $\theta \in \mathbb{R}$ est l'angle de la rotation, on a que

$$\mathrm{Tr}(u) = -1 + 2\cos(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{Tr}(u)+1}{2} = \frac{7/9+1}{2} = \frac{8}{9}.$$

   De plus, on sait que le nombre $\sin(\theta)$ est de même signe que

$$\det_{\mathscr{C}}(e_1, i, u(i)) = \frac{1}{9\sqrt{17}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{16}{9\sqrt{17}} > 0,$$

   donc u est la composée commutative entre :

   - la rotation d'axe D dirigé par $i - 4k$ et d'angle $\mathrm{Arccos}(8/9)$;
   - la réflexion par rapport au plan $D^{\perp} = \mathrm{Vect}(j, 4i + k)$.

3) Si l'on souhaite déterminer une base orthonormée directe $\mathscr{B}$ adaptée à l'isométrie u, on peut prendre $e_2 = j$ qui est orthogonale à e_1 et

$$e_3 = e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{\sqrt{17}}(4i + k).$$

V.B - Diagonaliser une matrice symétrique réelle

On considère une matrice symétrique réelle $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on souhaite diagonaliser de sorte que la matrice de passage P soit orthogonal.

Méthode : Déterminer la matrice de passage orthogonale

1) On détermine les sous-espaces propres de A.
2) On construit des bases orthonormées de chacun des sous-espaces propres (en utilisant, par exemple, l'algorithme de Gram-Schmidt).
3) La matrice P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs des bases orthonormées trouvées.

Exemple 8 : Nous allons diagonaliser la matrice symétrique réelle ci-dessous avec une matrice de passage orthogonale.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(x) = (x+3)(x-3)^2.$$

Les sous-espaces propres de la matrice A sont

$$E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base de $E_3(A)$ ci-dessus, on en déduit qu'une base orthonormée de $E_3(A)$ est

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right).$$

En normalisant le vecteur dans la base de $E_{-3}(A)$ ci-dessus, on obtient une base orthonormée de $E_{-3}(A)$ avec le vecteur

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

De plus, on a par construction que $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, donc

$$P^{-1} = P^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

V.C - Étudier une conique

On se place dans un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé (O, i, j).

Définition (Conique) : Une conique dans $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant une équation de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

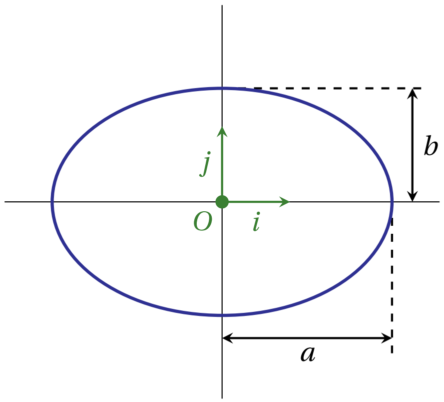
où $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ vérifie $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Proposition 12 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

(i) La conique admettant pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ est une ellipse dont le centre est l'origine.

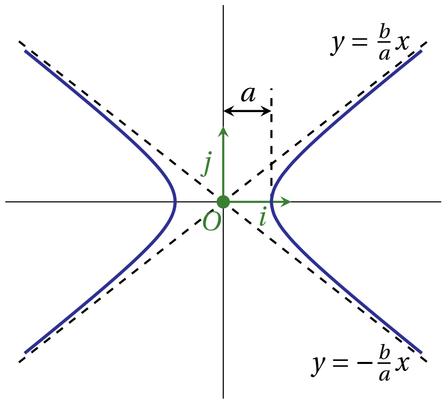
(ii) La conique admettant pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole dont le centre est l'origine.

Illustration : On peut représenter les deux coniques de la proposition.



Ellipse d'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$



Hyperbole d'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Méthode : Étudier une conique

On considère une conique de $\mathscr{P}$ dont l'équation est

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

1) On met l'équation sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0.$$

2) Comme la matrice A est symétrique réelle, on peut déterminer une matrice orthogonale $P \in O_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.

3) On détermine l'équation de la conique dans le repère (O, e_1, e_2) où (e_1, e_2) est la base orthonormée de vecteurs propres que l'on vient de calculer. Pour cela on procède au changement de variable

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \underset{\text{Transposition}}{\iff} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^{\mathrm{T}}$$

dans l'équation de départ. On obtient ainsi une équation simple dans le nouveau repère orthonormé (O, e_1, e_2) qui nous permet d'identifier la conique.

Exemple 9 : On souhaite étudier la conique $\mathscr{C}_1$ de $\mathscr{P}$ dont l'équation est

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y + 6 = 0.$$

On commence par réécrire cette équation sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 6 = 0.$$

Comme la matrice A est symétrique réelle, on peut lui appliquer la méthode de diagonalisation vue dans la partie précédente. On trouve que les valeurs propres de A sont 2 et 4 et que les sous-espaces propres respectifs associés sont

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_4(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on peut écrire $D = P^{-1}AP$ avec les matrices

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}).$$

On définit donc les vecteurs

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j) \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i + j).$$

Pour obtenir l'équation de la conique dans le repère (O, e_1, e_2), on effectue le changement de variable

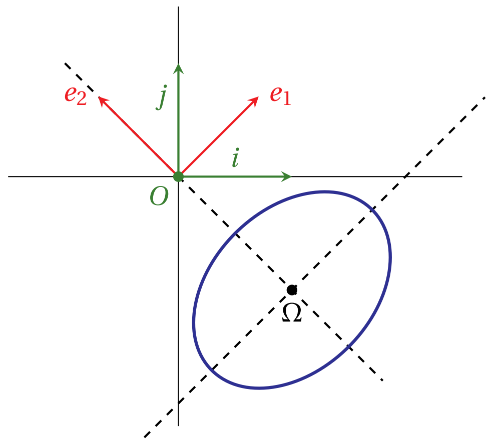
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

dans l'équation de la conique. On obtient

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 6 = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^{\mathrm{T}} A P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 8 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 6 = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 8\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 6 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2u^2 + 4v^2 + 8\sqrt{2}v + 6 = 0 \\
&\Leftrightarrow u^2 + 2(v + \sqrt{2})^2 = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi la conique étudiée est une ellipse. Son centre Ω à pour coordonnée $(0, -\sqrt{2})$ dans le repère (O, e_1, e_2), donc $(1, -1)$ dans le repère (O, i, j).

On peut tracer la conique $\mathscr{C}_1$ en utilisant son équation dans le repère (O, e_1, e_2).



La conique $\mathscr{C}_1$

Exemple 10 : On souhaite étudier la conique $\mathscr{C}_2$ de $\mathscr{P}$ dont l'équation est

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y = 0.$$

On commence par réécrire cette équation sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & -50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Les valeurs propres de A sont 0 et 25 et les sous-espaces propres associés sont

$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{25}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on peut écrire $D = P^{-1}AP$ avec les matrices

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}).$$

On définit donc les vecteurs

$$e_1 = \frac{1}{5}(3i+4j) \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{5}(-4i+3j).$$

Pour obtenir l'équation de la conique dans le repère (O, e_1, e_2), on effectue le changement de variable

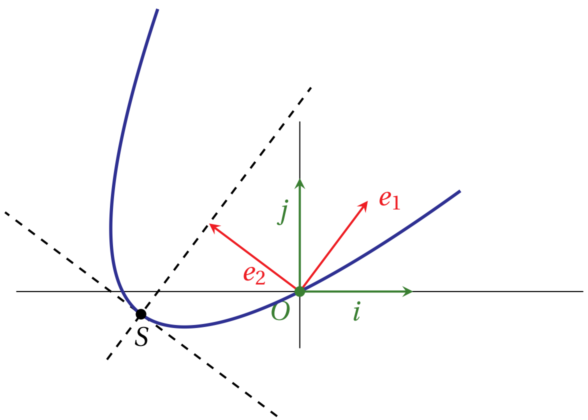
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

dans l'équation de la conique. On obtient

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & -50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \;&\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^{\mathrm{T}} A P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & -50 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25 & -50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow\; 25v^2 - 25u - 50v = 0 \\
&\Leftrightarrow\; u = v^2 - 2v.
\end{aligned}$$

Ainsi la conique étudiée est une parabole. Son sommet S a pour coordonnée $(-1, 1)$ dans le repère (O, e_1, e_2), donc $(-7/5, -1/5)$ dans le repère (O, i, j).

On peut tracer la conique $\mathscr{C}_2$ en utilisant son équation dans le repère (O, e_1, e_2).



La conique $\mathscr{C}_2$

Conclusion : Pour terminer, voici la liste exhaustive des types de coniques.

a) L'ensemble vide (exemple : $x^2 + y^2 = -1$),

b) Un point (exemple : $x^2 + y^2 = 0$),

c) Une droite (exemple : $x^2 = 0$),

d) Deux droites parallèles (exemple : $x^2 = 1$),

e) Deux droites sécantes (exemple : $x^2 - y^2 = 0$),

f) Une parabole (exemple : $x^2 - y = 0$),

g) Une ellipse (exemple : $x^2 + 2y^2 = 1$),

h) Une hyperbole (exemple : $x^2 - 2y^2 = 1$).