CHAPITRE 2

Intégration d'une fonction sur un intervalle

Jérôme Von Buhren
http://vonbuhren.free.fr

Lycée Blaise Pascal - TSI

L'intégration est essentielle dans les différentes disciplines scientifiques. Elle permet par exemple de définir la transformation de Laplace et la transformation de Fourier qui sont des notions importantes en physique et en science de l'ingénieur. L'intégration joue également un rôle central en probabilité et en statistique.

L'objectif de ce chapitre est d'étendre la notion d'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle qui n'est pas nécessairement un segment. Une première difficulté apparait directement : l'aire sous la courbe de la fonction n'est plus nécessairement fini, ce qui nous amènera à définir la notion d'intégrale convergente.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

On fixe une fonction continue $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ avec $a < b \leqslant +\infty$.

Définition (Intégrale d'une fonction sur $[a, b[$)

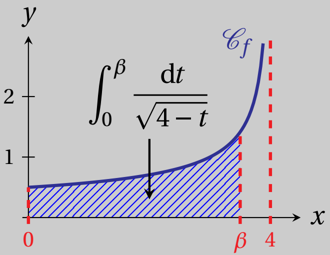
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si la limite $\displaystyle\lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Exemples 1

a) On considère la fonction continue $f : [0,4[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4-t}}$.



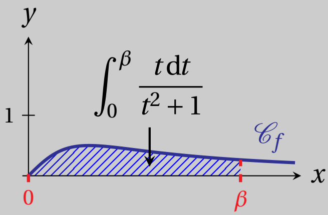
Pour tout $\beta \in [0,4[$, on a

$$\int_0^\beta \frac{dt}{\sqrt{4-t}} = \left[-2\sqrt{4-t}\right]_0^\beta \xrightarrow[\beta \to 4^-]{} 4.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,dt$ est convergente et que sa valeur est 4.

Exemples 1

b) On considère la fonction continue $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$.



Pour tout $\beta \in [0, +\infty[$, on a

$$\int_0^\beta \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_0^\beta \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} +\infty,$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

On fixe une fonction continue $f :]a, b] \to \mathbb{K}$ avec $-\infty \leqslant a < b$.

Définition (Intégrale d'une fonction sur $]a, b]$)

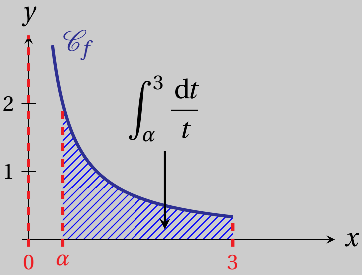
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si la limite $\displaystyle\lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Exemple 2

On considère la fonction continue $f :]0,3] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{t}$.



Pour tout $\alpha \in]0,3]$, on a

$$\int_\alpha^3 \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_\alpha^3 \xrightarrow[\alpha \to 0^+]{} +\infty,$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt$ est divergente.

On fixe une fonction continue $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Définition (Intégrale d'une fonction sur $]a, b[$)

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si les intégrales

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

sont convergentes où $c \in]a, b[$ est un point quelconque. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

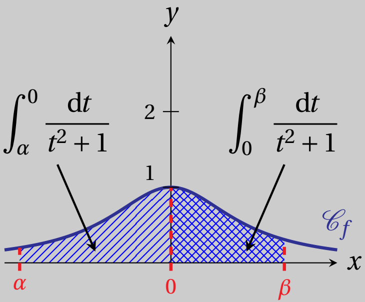
Remarques 1

a) La convergence ou la divergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas du choix du point $c \in]a, b[$.

b) Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, sa valeur ne dépend pas du choix du point $c \in]a, b[$.

Exemple 3

On considère la fonction continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=\dfrac{1}{t^2+1}$.



Pour tout $\alpha<0<\beta$, on a

$$\int_0^\beta \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = [\operatorname{Arctan}(t)]_0^\beta \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

$$\int_\alpha^0 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = [\operatorname{Arctan}(t)]_\alpha^0 \xrightarrow[\alpha\to-\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Exemple 3

On en déduit que les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente par définition et sa valeur est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

On fixe un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ avec avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Proposition (Relation de Chasles)

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors pour tout point $c \in]a, b[$, les intégrales

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

sont convergentes et on a la relation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème du changement de variable

Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ une bijection croissante de classe $\mathscr{C}^1$. Si $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue, alors les intégrales

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

sont de mêmes natures. De plus, si elles convergent, alors

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarques 2

a) Il faut s'assurer que les intégrales sont convergentes dans le théorème ci-dessus pour écrire une égalité.

b) Si $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ est une bijection décroissante de classe $\mathscr{C}^1$, on a un résultat analogue avec

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

c) En pratique, le changement de variable s'effectue comme pour une intégrale sur un segment, à ceci près que a, b, α, β peuvent prendre les valeurs $\pm\infty$.

Exemple 4

On souhaite étudier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$. En effectuant le changement de variable $x = \sin(t)$ dans I, on obtient l'intégrale

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme la fonction $t \mapsto \sin^2(t)$ est continue sur $[0, \pi/2]$, l'intégrale J est convergente. On en déduit par le théorème du changement de variable que l'intégrale I est convergente et que

$$I = J = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Proposition 1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\lambda > 0$.

Proposition 2

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Proposition (Intégrales de Riemann)

Soit $a \in \mathbb{R}$.

(i) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a}$ est convergente si et seulement si $a > 1$.

(ii) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^a}$ est convergente si et seulement si $a < 1$.

On fixe un intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$ avec avec $a < b \leqslant +\infty$.

Théorème de comparaison Nº 1

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues vérifiant $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [a, b[$.

(i) Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

(ii) Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Exemple 5

On souhaite étudier la convergence de $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Comme

$$\left(\forall t \in [1, +\infty[, \quad 0 \leqslant \frac{\sin^2(t)}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}\right) \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \text{ converge,}$$

on en déduit que l'intégrale I est convergente par comparaison.

Remarques 3

a) Il suffit de vérifier l'inégalité $0 \leqslant f \leqslant g$ au voisinage de b.

b) La règle s'adapte à des intégrales de fonctions continues sur $]a, b]$.

Théorème de comparaison N° 2

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Si f est de signe constant au voisinage de b^- et que $f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t)$, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}$$

Exemple 6

On souhaite étudier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Comme

$$\frac{\sin(t)}{t} \underset{0^+}{\sim} \frac{t}{t} \underset{0^+}{\sim} 1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 1\,\mathrm{d}t \text{ converge,}$$

on en déduit que l'intégrale I est convergente par comparaison.

Remarque 4

La règle s'adapte à des intégrales de fonctions continues sur $]a, b]$.

On considère un intervalle non-vide I de $\mathbb{R}$ et l'on note $a = \inf I$ et $b = \sup I$.
Ainsi, l'intervalle I est de la forme $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Définition (Fonction intégrable)

Une fonction continue $f : I \to \mathbb{K}$ est dite intégrable sur I si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Remarques 5

a) Une fonction continue $f : I \to \mathbb{K}$ est intégrable sur I si et seulement elle est intégrable sur $]a, b[$.

b) Si f est intégrable sur I, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Théorème 1

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue et intégrable sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Remarque 6

Autrement dit, si une intégrale converge absolument, alors elle est convergente.

Exemple 7

On souhaite étudier la convergence de $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Comme

$$\left(\forall t \in [1,+\infty[, \quad 0 \leqslant \left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}\right) \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \text{ converge,}$$

on en déduit que l'intégrale I est absolument convergente par comparaison. On en déduit par le théorème précédent que l'intégrale I est convergente.

ATTENTION

La réciproque du théorème est fausse. On peut par exemple vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, mais qu'elle ne converge pas absolument.

Notation

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue et intégrable sur I, alors on note

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 3

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et intégrable sur I.

(i) On a l'inégalité

$$\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

(ii) Si $\displaystyle\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle sur I.

Proposition 4

Soient $f, g : I \to \mathbb{K}$ continues et intégrables sur I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

(i) La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue et intégrable sur I et on a

$$\int_I (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(ii) Si f est positive sur I, alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

(iii) Si $f \leqslant g$ sur I, alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.

Corollaire 1

L'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{K}$ continues et intégrables sur I est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

On souhaite étudier le convergence d'une intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction définie au moins sur l'intervalle $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Méthode : Étudier la convergence d'une intégrale

1) On détermine si f est continue sur $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$.
   a) Si f est continue sur $[a,b]$, l'intégrale est convergente.
   b) Si f n'est que continue sur $]a,b[$, on sépare l'intégrale en deux pour se ramener au cas où seul une des deux extrémités de l'intervalle d'intégration est ouverte.

Méthode : Étudier la convergence d'une intégrale

2) On est donc ramené au cas où f est continue sur $[a, b[$ (ou $]a, b]$). On essaye d'utiliser les différents résultats du cours pour décider de la nature de l'intégrale dans l'ordre suivant.
   a) Si on connait une primitive de f, on peut utiliser la définition pour étudier la convergence de l'intégrale.
   b) Un équivalent de f ou de $|f|$ au voisinage de b,
   c) Une inégalité avec f ou avec $|f|$ valable au voisinage de b,
   d) Un changement de variable pour transformer l'intégrale.
3) Dans le cas où on avait séparé l'intégrale de départ en deux, on conclut (Par définition, l'intégrale converge si chacune des deux intégrales obtenus après la séparation convergent).

Exemple 8

Nous allons étudier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $f : t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour tout $\beta \in [0, +\infty[$, on a

$$\int_0^{\beta} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^{\beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\beta^2} \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \frac{1}{2},$$

donc l'intégrale I converge et sa valeur est $1/2$.

Exemple 9

Nous allons étudier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\cos(t)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On doit donc étudier la convergence des deux intégrales

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\cos(t)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 9

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\cos(t)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

- On a l'équivalent $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \geqslant 0$ et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente, donc l'intégrale I_1 converge absolument par comparaison.
- On a l'inégalité $0 \leqslant |f(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ pour tout $t \in [1, +\infty[$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de référence convergente, donc I_2 converge absolument par comparaison, donc I_2 converge.

Les intégrales I_1 et I_2 convergent, donc l'intégrale I est convergente.

Exemple 10

Nous allons étudier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On doit donc étudier la convergence des deux intégrales

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

- On a l'équivalent $f(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{t} \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann divergente, donc l'intégrale I_1 diverge par comparaison.
- Comme l'intégrale I_1 diverge, l'étude de la convergence de I_2 est inutile.

Comme l'intégrale I_1 diverge, on conclut que l'intégrale I diverge.

Exemple 11

Nous allons étudier la convergence de l'intégrale

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{2+\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{2+\cos(t)}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$. On a l'inégalité $0 \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant f(t)$ pour tout $t \in [1,+\infty[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est une intégrale de Riemann divergente, donc I diverge par comparaison.

Exemple 12

Nous allons étudier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0,1[$. En utilisant le changement de variable $u = 1 - t$ dans l'intégrale I, on obtient l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}.$$

L'intégrale J est une intégrale de Riemann convergente, donc l'intégrale I est convergente par le théorème du changement de variable. De plus, on a $I = J$.