

CHAPITRE 2

Intégration d'une fonction sur un intervalle

Exercice 1 : On note I l'intégrale que l'on étudie.

(i) La fonction $t \mapsto 1/(t-1)^2$ est continue sur $]1, 2]$. Pour tout $\alpha \in]1, 2]$, on a

$$\int_{\alpha}^2 \frac{dt}{(t-1)^2} = \left[-\frac{1}{t-1} \right]_{\alpha}^2 = \frac{1}{\alpha-1} - 1 \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1^+} +\infty,$$

donc l'intégrale I diverge.

(ii) La fonction $t \mapsto \cos(t)/\sqrt{\sin(t)}$ est continue sur $]0, \pi/2]$. Pour tout $\alpha \in]0, \pi/2]$, on a

$$\int_{\alpha}^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}} dt = \left[2\sqrt{\sin(t)} \right]_{\alpha}^{\pi/2} = 2 - 2\sqrt{\sin(\alpha)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} 2,$$

donc l'intégrale I converge et $I = 2$.

(iii) La fonction $t \mapsto (1-t^2)^{-1/2}$ est continue sur $] -1, 1[$. On introduit donc

$$I_1 = \int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Pour tout $\alpha \in] -1, 0]$, on a

$$\int_{\alpha}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\text{Arcsin}(t)]_{\alpha}^0 = -\text{Arcsin}(\alpha) = \xrightarrow{\alpha \rightarrow -1^+} \frac{\pi}{2},$$

donc l'intégrale I_1 converge et $I_1 = \pi/2$. De même, pour tout $\beta \in [0, 1]$, on a

$$\int_0^{\beta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\text{Arcsin}(t)]_0^{\beta} = \text{Arcsin}(\beta) = \xrightarrow{\beta \rightarrow 1^-} \frac{\pi}{2},$$

donc l'intégrale I_2 converge et $I_2 = \pi/2$. Finalement, l'intégrale I est convergente et on a $I = I_1 + I_2 = \pi$.

(iv) La fonction $t \mapsto te^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour tout $\beta \in [0, +\infty[$, on a avec une intégration par parties

$$\int_0^{\beta} te^{-t} dt = 1 - (\beta+1)e^{-\beta} \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 1,$$

donc l'intégrale I converge et $I = 1$.

(v) La fonction $t \mapsto \tan(t)$ est continue sur $[0, \pi/2[$. Pour tout $\beta \in [0, \pi/2[$, on a

$$\int_0^{\beta} \tan(t) dt = \int_0^{\beta} \frac{\sin(t)}{\cos(t)} dt = [-\ln(\cos(t))]_0^{\beta} = -\ln(\cos(\beta)) \xrightarrow{\beta \rightarrow \pi/2^-} +\infty,$$

donc l'intégrale I diverge.

(vi) La fonction $t \mapsto \ln(1+1/t^2)$ est continue sur $]0, +\infty[$. On introduit donc

$$I_1 = \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

Pour tout $\alpha \in]0, 1]$, on a avec une intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^1 \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt &= \ln(2) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) + \frac{\pi}{2} - 2\text{Arctan}(\alpha) \\ &\xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} \ln(2) + \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

donc l'intégrale I_1 converge et $I_1 = \ln(2) + \frac{\pi}{2}$. De même, pour tout $\beta \in [1, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \int_1^{\beta} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt &= \left[t \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \right]_1^{\beta} - \int_1^{\beta} t \frac{(-2/t)}{t^2+1} dt \\ &= \beta \ln\left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right) - \ln(2) + 2[\text{Arctan}(t)]_1^{\beta} \\ &= \beta \ln\left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right) - \ln(2) + 2\text{Arctan}(\beta) - \frac{\pi}{2} \\ &\xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} -\ln(2) + \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

donc l'intégrale I_2 converge et $I_2 = -\ln(2) + \frac{\pi}{2}$. Finalement, l'intégrale I est convergente et on a $I = I_1 + I_2 = \pi$.

Exercice 2 : Les fonctions $t \mapsto \cos(t)e^{-at}$ et $t \mapsto \sin(t)e^{-at}$ sont continues sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Pour tout $\beta \in]0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\beta \cos(t)e^{-at} dt + i \int_0^\beta \sin(t)e^{-at} dt &= \int_0^\beta e^{(i-a)t} dt \\ &= \left[\frac{e^{(i-a)t}}{i-a} \right]_0^\beta = \frac{e^{(i-a)\beta} - 1}{i-a}. \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\int_0^\beta \cos(t)e^{-at} dt = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{(i-a)\beta} - 1}{i-a} \right), \quad \int_0^\beta \sin(t)e^{-at} dt = \operatorname{Im} \left(\frac{e^{(i-a)\beta} - 1}{i-a} \right).$$

Comme $|e^{(i-a)\beta}| = e^{-a\beta} \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit que I et J convergent et que

$$I = \operatorname{Re} \left(\frac{-1}{i-a} \right) = \frac{a}{a^2+1} \quad \text{et} \quad J = \operatorname{Im} \left(\frac{-1}{i-a} \right) = \frac{1}{a^2+1}.$$

Exercice 3 : On note I l'intégrale que l'on étudie et f la fonction intégrée.

(i) La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$ et on a $|f(t)| \underset{+\infty}{\sim} 1/t^2 \geq 0$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc I est absolument convergente par comparaison, donc convergente.

(ii) La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$. On doit donc étudier les intégrales

$$J = \int_0^1 \frac{dt}{e^t - 1} \quad \text{et} \quad K = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}.$$

- On a $f(t) \underset{0^+}{\sim} 1/t \geq 0$. Or $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ est une intégrale de Riemann divergente, donc l'intégrale J est divergente par comparaison.

On conclut que I est divergente.

(iii) La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$. On doit donc étudier les intégrales

$$J = \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) dt \quad \text{et} \quad K = \int_1^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) dt.$$

- Sur $[0, 1]$, on a $0 \leq |f(t)| \leq 1$, or $\int_0^1 1 dt$ est convergente, donc J est absolument convergente par comparaison, donc convergente.
- On a $f(t) \underset{+\infty}{\sim} 1 \geq 0$, or $\int_1^{+\infty} 1 dt$ est divergente, donc K est divergente par comparaison.

On conclut que I est divergente.

(iv) La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$. On doit donc étudier les intégrales

$$J = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt \quad \text{et} \quad K = \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt.$$

- Sur $[0, 1]$, on a $0 \leq |f(t)| \leq 1$, or $\int_0^1 1 dt$ est convergente, donc J est absolument convergente par comparaison, donc convergente.
- On a $f(t) \underset{+\infty}{\sim} 1/t^2 \geq 0$, or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc K est convergente par comparaison.

On conclut que I est convergente.

(v) La fonction f est continue sur $]0, 3[$. On doit donc étudier les intégrales

$$J = \int_0^1 \frac{dt}{(3-t)\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad K = \int_1^3 \frac{dt}{(3-t)\sqrt{t}}.$$

- On a $f(t) \underset{0^+}{\sim} 1/\sqrt{t} \geq 0$, or $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est une intégrale de Riemann convergente, donc J converge absolument par comparaison, donc J converge.
- En effectuant le changement de variable $u = 3 - t$ dans l'intégrale K , on obtient l'intégrale

$$K' = \int_0^2 \underbrace{\frac{1}{u\sqrt{3-u}}}_{g(u)} du.$$

On a $g(u) \underset{0}{\sim} 1/u \geq 0$, or $\int_0^1 \frac{du}{u}$ est une intégrale de Riemann divergente, donc K' est divergente par comparaison. Avec le théorème du changement de variable, on en déduit que K est divergente.

On conclut que I est divergente.

(vi) La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$. On doit donc étudier les intégrales

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^3} dt \quad \text{et} \quad K = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^3} dt.$$

- On a $|f(t)| \underset{0^+}{\sim} -\ln(t) \geq 0$, or $\int_0^1 \ln(t) dt$ est une intégrale de référence convergente, donc J est absolument convergente par comparaison, donc convergente.
- Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a $0 \leq f(t) \leq \frac{t}{t^3} = \frac{1}{t^2}$, or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann convergente, donc K est convergente par comparaison.

On conclut que I est convergente.

(vii) La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, on a

$$0 \leq f(t) = |\sin(t)| |\sin(e^{-t})| \leq e^{-t}.$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est une intégrale de référence convergente, donc I converge absolument par comparaison, donc I est convergente.

(viii) La fonction f est continue sur $]0, 1[$. On doit donc étudier les intégrales

$$J = \int_0^{1/2} \frac{\ln(t)}{(1-t)^{3/2}} dt \quad \text{et} \quad K = \int_{1/2}^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{3/2}} dt.$$

- On a $|f(t)| \underset{0}{\sim} -\ln(t) \geq 0$, or $\int_0^1 \ln(t) dt$ est une intégrale de référence convergente, donc J est absolument convergente par comparaison, donc convergente.
- En effectuant le changement de variable $u = 1 - t$ dans l'intégrale K , on obtient l'intégrale

$$K' = \int_0^{1/2} \underbrace{\frac{\ln(1-u)}{u^{3/2}}}_{g(u)} du.$$

On a $|g(u)| \underset{0^+}{\sim} 1/u^{1/2} \geq 0$, or $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc K' est absolument convergente par comparaison, donc convergente. Avec le théorème du changement de variable, on en déduit que K est convergente.

On conclut que I est convergente.

(ix) La fonction f est continue sur $[0, 1]$. En effectuant le changement de variable $u = 1 - t$, on obtient l'intégrale

$$I' = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{1 - \sqrt{1-u}}}_{g(u)} du.$$

De plus, on a

$$g(u) = \frac{1}{1 - (1 - u/2 + o(u))} \underset{0^+}{\sim} \frac{2}{u},$$

or $\int_0^1 \frac{du}{u} \geq 0$ est une intégrale de Riemann divergente, donc I' est divergente par comparaison. On conclut que I est divergente par le théorème du changement de variable.

Exercice 4 : On note I l'intégrale dont on étudie la convergence.

(i) La fonction $f : t \mapsto \left((t+1)^{1/3} - t^{1/3}\right)^2$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, on a

$$\begin{aligned} (t+1)^{1/3} &= t^{1/3} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{1/3} = t^{1/3} \left(1 + \frac{1}{3t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right) \\ &= t^{1/3} + \frac{1}{3t^{2/3}} + o\left(\frac{1}{t^{2/3}}\right). \end{aligned}$$

En particulier, on obtient

$$f(t) = \left(\frac{1}{3t^{2/3}} + o\left(\frac{1}{t^{2/3}}\right)\right)^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{9t^{4/3}} \geq 0.$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{4/3}}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc l'intégrale I est convergente par comparaison.

(ii) La fonction $f : t \mapsto t + 2 - \sqrt{t^2 + 4t + 1}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{t^2 + 4t + 1} &= t \left(1 + \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2} \right)^{1/2} \\ &= t \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{t} + \frac{1}{t^2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{4}{t} \right)^2 + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \right) \\ &= t + 2 - \frac{3}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right).\end{aligned}$$

En particulier, on obtient

$$f(t) = \left(\frac{3}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{2t} \geq 0.$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est une intégrale de Riemann divergente, donc l'intégrale I diverge par comparaison.

Exercice 5 : La fonction $t \mapsto (t - \sin(t)) / t^a$ est continue sur $]0, +\infty[$. On note

$$J_a = \int_0^1 \frac{t - \sin(t)}{t^a} dt \quad \text{et} \quad K_a = \int_1^{+\infty} \frac{t - \sin(t)}{t^a} dt.$$

- On étudie l'intégrale J_a . On a

$$\frac{t - \sin(t)}{t^a} = \frac{t^3/6 + o(t^3)}{t^a} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{6t^{a-3}} \geq 0$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dt}{t^{a-3}}$ converge si et seulement si $a - 3 < 1$ ce qui équivaut à $a < 4$. On en déduit que J_a converge si et seulement si $a < 4$ par comparaison.

- On étudie l'intégrale K_a . On a

$$\frac{t - \sin(t)}{t^a} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t}{t^a} = \frac{1}{t^{a-1}} \geq 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{a-1}}$ converge si et seulement si $a - 1 > 1$ ce qui équivaut à $a > 2$. On en déduit que K_a converge si et seulement si $a > 2$ par comparaison.

Finalement, l'intégrale I_a converge si et seulement si $2 < a < 4$.

Exercice 6 : En posant $u = e^t$ dans l'intégrale I , on obtient

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{du}{(u+1)^2}.$$

Pour tout $\beta \in [1, +\infty[$, on a

$$\int_1^\beta \frac{du}{(u+1)^2} = \left[\frac{-1}{u+1} \right]_1^\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{\beta+1} \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{2},$$

donc l'intégrale J est convergente et vaut $1/2$. Finalement, par le théorème du changement de variable, l'intégrale I est convergente et $I = 1/2$.

Exercice 7 : En posant $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale I , on obtient

$$J = \int_0^1 4 \ln(u) du.$$

Pour tout $\alpha \in]0, 1]$, on a

$$\int_\alpha^1 4 \ln(u) du = 4 [u \ln(u) - u]_\alpha^1 = 4(-1 - \alpha \ln(\alpha) + \alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} -4,$$

donc l'intégrale J est convergente et vaut -4 . Finalement, par le théorème du changement de variable, l'intégrale I est convergente et $I = -4$.

Exercice 8 : En posant $x = (1 + \sin(t))/2$ dans l'intégrale I , on obtient

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx$$

qui est convergente et vaut π . Ainsi, par le théorème du changement de variable, l'intégrale I est convergente et $I = \pi$.

Exercice 9 :

1. La fonction $t \mapsto 1/((1+t^2)(1+t^a))$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, on a

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2+a}} \geq 0.$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2+a}}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc I_a est convergente par comparaison. De même, $t \mapsto t^a/((1+t^2)(1+t^a))$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et

$$\frac{t^a}{(1+t^2)(1+t^a)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \geq 0.$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc J_a est convergente par comparaison.

2. Avec le changement de variable, on obtient directement que $I_a = J_a$.

3. On a

$$I_a + J_a = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^a) dt}{(1+t^2)(1+t^a)} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Or, pour tout réel $\beta \in [0, +\infty[$, on a

$$\int_0^\beta \frac{dt}{(1+t^2)} = [\text{Arctan}(t)]_0^\beta = \text{Arctan}(\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2},$$

donc $I_a + J_a = \pi/2$. Comme $I_a = J_a$, on en déduit que $I_a = J_a = \pi/4$.

Exercice 10 :

1. Il est évident que $0 \leq \ln(t)$ pour tout $t \in [1, +\infty[$. On obtient la seconde inégalité en montrant que la fonction $h : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \sqrt{t} - \ln(t)$ est positive à l'aide d'une étude de fonction.
2. La fonction $f : t \mapsto \ln(t)/(a^2 + t^2)$ est continue sur $]0, +\infty[$. On introduit donc les intégrales

$$J_a = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} dt \quad \text{et} \quad K_a = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} dt.$$

- On a $|f(t)| \underset{0^+}{\sim} |\ln(t)| = -\ln(t) \geq 0$. Or l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ est une intégrale donc J_a converge absolument par comparaison, donc l'intégrale J_a converge.

- Avec la question 1, on a $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^{3/2}}$, donc pour tout réel $t \in [1, +\infty[$.

Comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^{3/2}}$ est convergente, donc K_a est absolument convergente par comparaison, donc convergente.

Finalement, l'intégrale I_a est convergente.

3. Avec le changement de variable, on obtient $I_1 = -I_1$, donc $I_1 = 0$.

4. Avec le changement de variable $t = au$, on obtient

$$\begin{aligned} I_a &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{a \ln(au)}{a^2 + a^2 u^2} du \\ &= \frac{\ln(a)}{a} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} + \underbrace{\frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du}_{I_1} = \frac{\ln(a)}{a} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}. \end{aligned}$$

Or, pour tout réel $\beta \in [0, +\infty[$, on a

$$\int_0^\beta \frac{dt}{(1+t^2)} = [\text{Arctan}(t)]_0^\beta = \text{Arctan}(\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2},$$

$$\text{donc } I_a = \frac{\pi \ln(a)}{2a}.$$

Exercice 11 :

1. La fonction $t \mapsto \ln(\sin(t))$ est continue sur $]0, \pi/2[$. De plus, on a

$$|\ln(\sin(t))| = \left| \ln(t) + \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) \right| \underset{0^+}{\sim} |\ln(t)| = -\ln(t) \geq 0.$$

Or $\int_0^1 \ln(t) dt$ est une intégrale de référence convergente, donc I est absolument convergente par comparaison, donc I converge.

2. En posant $u = \pi/2 - t$ dans l'intégrale J , elle devient l'intégrale I . On en déduit que J est convergente et que $I = J$.

3. On a

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t) \cos(t)) dt = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt \\ &= -\frac{\pi \ln(2)}{2} + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t)) dt. \end{aligned}$$

En posant $u = 2t$, on obtient

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) du = \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u)) du.$$

En posant $x = \pi - t$ sans cette dernière intégrale, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u)) du &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\pi - x)) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) dx = \frac{1}{2} I. \end{aligned}$$

Finalement, on a montré que $I + J = -\frac{\pi \ln(2)}{2} + I$, donc

$$I = J = -\frac{\pi \ln(2)}{2}.$$

Exercice 12 :

- Il suffit d'effectuer une intégration par parties.
- Les fonctions $f : t \mapsto \sin(t)/t$ et $g : t \mapsto \cos(t)/t^2$ sont continues sur $[\pi, +\infty[$. De plus, on a

$$\forall t \in [\pi, +\infty[, \quad 0 \leq \left| \frac{\cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$$

et $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc $\int_{\pi}^{+\infty} g(t) dt$ est convergente par comparaison. Comme $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \cos(\beta)/\beta = 0$, on en déduit en prenant la limite lorsque $\beta \rightarrow +\infty$ dans la relation de la première question que l'intégrale I est convergente.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'inégalité

$$\forall t \in [n\pi, (n+1)\pi], \quad \frac{|\sin(t)|}{t} \geq \frac{|\sin(t)|}{(n+1)\pi}.$$

En intégrant, on en déduit

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| dt.$$

Or la fonction $t \mapsto |\sin(t)|$ est π -périodique, donc

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| dt = \int_0^{\pi} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{\pi} = 2,$$

ce qui démontre l'inégalité.

4. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, en sommant les inégalités précédentes, on obtient

$$\int_{\pi}^{N\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \geq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2}{(n+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n}.$$

Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^{N\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt = +\infty,$$

par comparaison. Ainsi, l'intégrale I ne converge pas absolument.

Exercice 13 :

1. La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour tout $\beta \in [0, +\infty[$, on a

$$\int_0^{\beta} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{\beta} = 1 - e^{-\beta} \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 1,$$

donc l'intégrale I_0 est convergente et on a $I_0 = 1$.

2. Il suffit d'effectuer une intégration par parties.

3. On démontre $\mathcal{P}_n$: « L'intégrale I_n est convergente » par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$.
- Initialisation : Pour $n = 0$, l'intégrale I_0 est convergente d'après la première question.
 - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, le second membre dans la relation de la question 2 converge vers $(n+1) \cdot I_n$ lorsque $\beta \rightarrow +\infty$. On en déduit que l'intégrale I_{n+1} est convergente. Finalement, on a montré que l'intégrale I_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. C'est la relation que l'on a montré dans l'hérédité de la récurrence ci-dessus. On en déduit par récurrence que $I_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 :

1. La fonction $t \mapsto t^{x-1}/(1+t)$ est continue sur $]0, 1]$ et on

$$\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}} \geq 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$ converge si et seulement si $1-x < 1$, ce qui équivaut à $x > 0$. Ainsi, la fonction f est définie sur $]0, +\infty[$ par comparaison.

2. Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ tel que $x \leq y$. On obtient

$$\forall t \in]0, 1], \quad \frac{t^{x-1}}{1+t} \geq \frac{t^{y-1}}{1+t},$$

donc en intégrant, $f(x) \geq f(y)$. Ainsi, la fonction f est décroissante.

3. Pour $x > 0$, on a

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}.$$

4. Comme la fonction f est décroissante et positive, on sait qu'elle admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. En prenant la limite dans la relation de la question 3, on trouve $\ell = 0$. De plus, en utilisant la relation de la question 3 et la décroissance de f , on a pour tout $x > 1$ que

$$\frac{1}{x} = f(x) + f(x+1) \leq 2f(x) \leq f(x-1) + f(x) = \frac{1}{x-1}.$$

On obtient donc

$$1 \leq 2xf(x) \leq \frac{x}{x-1},$$

donc en utilisant le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xf(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

5. Comme f est décroissante, on sait qu'elle admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. De même, la fonction $x \mapsto f(x+1)$ est décroissante et majorée par $f(1)$ sur $]0, +\infty[$, donc elle admet une limite finie lorsque $x \rightarrow 0$. On en déduit en prenant la limite dans la relation de la question 3 qu'on ne peut avoir que $\ell = +\infty$. De plus, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - xf(x+1) = 1 \Leftrightarrow f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$