

CHAPITRE 2

Intégration d'une fonction sur un intervalle

Exercice 1 : Étudier la convergence des intégrales suivantes, puis calculer leur valeur en cas de convergence.

$$(i) \int_1^2 \frac{dt}{(t-1)^2}, \quad (ii) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}} dt, \quad (iii) \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$(iv) \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt, \quad (v) \int_0^{\pi/2} \tan(t) dt, \quad (vi) \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt.$$

Exercice 2 : Pour $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$, on considère les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-at} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-at} dt.$$

Montrer que les intégrales I et J sont convergentes et calculer leur valeur.

Exercice 3 : Étudier la convergence des intégrales ci-dessous.

$$(i) \int_1^{+\infty} \frac{(t-1)(t-5)}{t^2(t^2+1)} dt, \quad (ii) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}, \quad (iii) \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) dt,$$

$$(iv) \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt, \quad (v) \int_0^3 \frac{dt}{(3-t)\sqrt{t}}, \quad (vi) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^3} dt,$$

$$(vii) \int_0^{+\infty} \sin(t) \sin(e^{-t}) dt, \quad (viii) \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{3/2}} dt, \quad (ix) \int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}.$$

Exercice 4 : Étudier la convergence des intégrales suivantes.

$$(i) \int_0^{+\infty} \left((t+1)^{1/3} - t^{1/3}\right)^2 dt, \quad (ii) \int_0^{+\infty} \left(t+2 - \sqrt{t^2+4t+1}\right) dt.$$

Exercice 5 : Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{t - \sin(t)}{t^a} dt.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que I_a converge.

Exercice 6 : On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t + 1)(e^{-t} + 1)}.$$

En posant $u = e^t$, montrer que I est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 7 : On considère l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt.$$

En posant $u = \sqrt{t}$, montrer que I est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 8 : On considère l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

En posant $t = (1 + \sin(x))/2$, montrer que I est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 9 : Pour $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$, on considère les intégrales

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^a)} \quad \text{et} \quad J_a = \int_0^{+\infty} \frac{t^a dt}{(1+t^2)(1+t^a)}.$$

1. Montrer que les intégrales I_a et J_a sont convergentes.
2. En posant $u = 1/t$, montrer que $I_a = J_a$.
3. Calculer $I_a + J_a$. En déduire la valeur de I_a et J_a .

Exercice 10 : Pour $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$, on considère l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} dt.$$

1. Montrer que $0 \leq \ln(t) \leq \sqrt{t}$ pour tout $t \in [1, +\infty[$.
2. Montrer que l'intégrale I_a est convergente pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.
3. En posant $u = 1/t$, montrer que $I_1 = 0$.
4. En posant $t = au$, calculer la valeur de I_a pour $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 11 (Intégrales d'Euler) : On considère les intégrales

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt.$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.
2. En utilisant le changement de variables $u = \pi/2 - t$, montrer que J est convergente et que $I = J$.
3. Calculer $I + J$. En déduire la valeur de I et J .

Exercice 12 : On considère l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1. Montrer que pour tout réel $\beta \in [\pi, +\infty[$, on a

$$\int_{\pi}^{\beta} \frac{\sin(t)}{t} dt = -\frac{1}{\pi} - \frac{\cos(\beta)}{\beta} - \int_{\pi}^{\beta} \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

2. En déduire que l'intégrale I est convergente.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \geq \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

4. En déduire que l'intégrale I n'est pas absolument convergente.

Exercice 13 : Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt.$$

1. Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et que $I_0 = 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $A \in [0, +\infty[$, montrer que l'on a la relation

$$\int_0^A t^{n+1} e^{-t} dt = -A^{n+1} e^{-A} + (n+1) \int_0^A t^n e^{-t} dt.$$

3. En déduire par récurrence que l'intégrale I_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que $I_{n+1} = (n+1) \cdot I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire la valeur de I_n .

Exercice 14 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on note

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier la monotonie de f .
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis un équivalent de f en $+\infty$.
5. Déterminer la limite de f en 0^+ , puis un équivalent de f en 0^+ .