

CHAPITRE 2

Intégration d'une fonction sur un intervalle

Plan du chapitre

I	Intégrale d'une fonction sur un intervalle	2
A -	Intervalle semi-ouvert à droite	2
B -	Intervalle semi-ouvert à gauche	2
C -	Intervalle ouvert	3
D -	Propriétés	3
II	Intégrale d'une fonction de signe constant	4
A -	Intégrales de référence	4
B -	Règles de comparaison	4
III	Intégrabilité d'une fonction sur un intervalle.....	5
IV	Méthode : Étudier la convergence d'une intégrale.....	6

Introduction

L'origine de l'intégration remonte à l'antiquité dans les problèmes d'ordre géométrique de calculs d'aires (quadrature), de volumes et de longueurs (rectification) qu'étudiaient les Grecs. Eudoxe invente la méthode d'exhaustion au IV^e siècle avant notre ère qui consiste à établir des encadrements successifs de l'aire d'une surface par deux quantités dont la différence s'épuise. Par ce procédé, Archimède a notamment déterminé un encadrement de π donnant ses deux premières décimales et il a calculé l'aire de la surface comprise entre une parabole et une de ses cordes.

Au cours du X^e siècle, les arabes déterminent l'aire d'une surface délimitée par la courbe de la fonction $x \mapsto x^4$ en se basant sur les travaux d'Archimède. Ce n'est que dans la première moitié du XVII^e siècle que Fermat calcule l'aire d'une surface comprise entre l'axe des abscisses, une parallèle à l'axe des ordonnées et la courbe de la fonction $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}$. À la même époque, le mathématicien italien Cavalieri invente un nouveau procédé de calcul d'aire : la méthode des indivisibles. L'intégration était une affaire de géomètre jusque là.

Dans la seconde moitié du XVII^e siècle, Newton et Leibniz fondèrent le calcul infinitésimal qui se compose de deux branches : le calcul différentiel et le calcul intégral. Ils développent la notion de différentielle et ils établissent le lien entre dérivation et intégration. La notation $\int$ est utilisée pour la première fois par Leibniz : un grand S pour la première lettre de *summa*, somme en latin.

Il subsiste néanmoins des failles dans la théorie de Leibniz qui manque de rigueur, principalement à cause de la mauvaise compréhension des notions de nombre et de fonction à cette époque. La théorie ne précise pas par exemple quelles sont les fonctions que l'on peut intégrer avec la construction de Leibniz. Cauchy est le premier à donner une définition rigoureuse de l'intégrale d'une fonction continue dans son *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal* publié en 1823. Sa construction s'appuie sur ce que l'on appelle actuellement une somme de Riemann et c'est celle qui est enseignée en classe préparatoire de nos jours. En 1854, Riemann présente un travail intitulé *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique* pour sa thèse d'habilitation à l'Université de Göttingen dans lequel il étend la théorie d'intégration de Cauchy à une plus grande classe de fonctions. L'intégrale de Riemann est la première théorie d'intégration satisfaisante.

Elle présente néanmoins un inconvénient : une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann peut converger simplement vers une fonction qui n'est pas intégrable au sens de Riemann. C'est pour pallier cette difficulté que Lebesgue présente en 1902 dans sa thèse intitulée *Intégrale, longueur, aire* une nouvelle théorie de l'intégration qui porte aujourd'hui son nom. Par la suite, d'autres intégrales sont construites. L'intégration est encore un sujet pour la recherche contemporaine.

L'intégration est essentielle dans les différentes disciplines scientifiques. Elle permet par exemple de définir la transformation de Laplace et la transformation de Fourier qui sont des notions importantes en physique et en science de l'ingénieur. L'intégration joue également un rôle central en probabilité et en statistique.

L'objectif de ce chapitre est d'étendre la notion d'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle qui n'est pas nécessairement un segment. Une première difficulté apparaît directement : l'aire sous la courbe de la fonction n'est plus nécessairement fini, ce qui nous amènera à définir la notion d'intégrale convergente.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

I - Intégrale d'une fonction sur un intervalle

I.A - Intervalle semi-ouvert à droite

On fixe une fonction continue $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ avec $a < b \leq +\infty$.

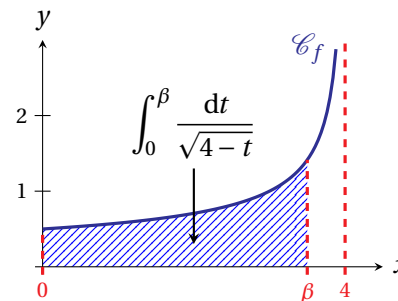
Définition (Intégrale d'une fonction sur $[a, b[$) : L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est dite convergente si la limite $\lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(t) dt$ existe et est finie. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(t) dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Exemples 1 :

a) On considère la fonction continue $f : [0, 4[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{4-t}}$.

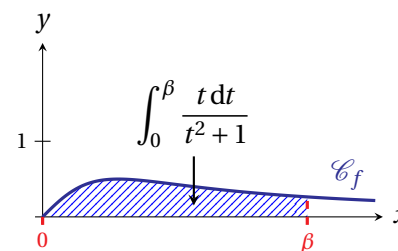


Pour tout $\beta \in [0, 4[$, on a

$$\int_0^\beta \frac{dt}{\sqrt{4-t}} = \left[-2\sqrt{4-t} \right]_0^\beta \xrightarrow{\beta \rightarrow 4^-} 4.$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^4 f(t) dt$ est convergente et que sa valeur est 4.

b) On considère la fonction continue $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$.



Pour tout $\beta \in [0, +\infty[$, on a

$$\int_0^\beta \frac{t dt}{t^2+1} = \left[\frac{1}{2} \ln(t^2+1) \right]_0^\beta \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est divergente.

I.B - Intervalle semi-ouvert à gauche

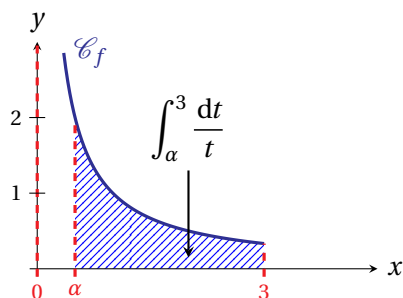
On fixe une fonction continue $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ avec $-\infty \leq a < b$.

Définition (Intégrale d'une fonction sur $]a, b]$) : L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est dite convergente si la limite $\lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_\alpha^b f(t) dt$ existe et est finie. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_\alpha^b f(t) dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Exemple 2 : On considère la fonction continue $f :]0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{t}$.



Pour tout $\alpha \in]0, 3]$, on a

$$\int_{\alpha}^3 \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_{\alpha}^3 \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} +\infty,$$

donc l'intégrale $\int_0^3 f(t) dt$ est divergente.

I.C - Intervalle ouvert

On fixe une fonction continue $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Définition (Intégrale d'une fonction sur $]a, b[$) : L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est dite convergente si les intégrales

$$\int_a^c f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t) dt$$

sont convergentes où $c \in]a, b[$ est un point quelconque. Dans ce cas, on note

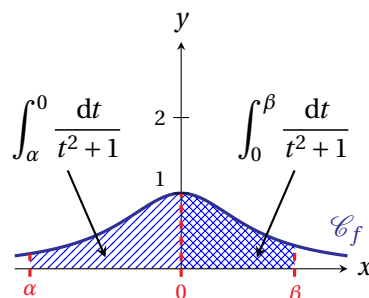
$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Remarques 1 :

- La convergence ou la divergence de l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ ne dépend pas du choix du point $c \in]a, b[$.
- Si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente, sa valeur ne dépend pas du choix du point $c \in]a, b[$.

Exemple 3 : On considère la fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$.



Pour tout $\alpha < 0 < \beta$, on a

$$\int_0^{\beta} \frac{dt}{t^2 + 1} = [\text{Arctan}(t)]_0^{\beta} \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\alpha}^0 \frac{dt}{t^2 + 1} = [\text{Arctan}(t)]_{\alpha}^0 \xrightarrow{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{\pi}{2}$$

On en déduit que les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_{-\infty}^0 f(t) dt$ sont convergentes, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente par définition et sa valeur est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{+\infty} f(t) dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

I.D - Propriétés

On fixe un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Proposition (Relation de Chasles) : Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. Si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente, alors pour tout point $c \in]a, b[$, les intégrales

$$\int_a^c f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t) dt$$

sont convergentes et on a la relation $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.

Théorème du changement de variable : Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$. Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue, alors les intégrales

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x) dx$$

sont de mêmes natures. De plus, si elles convergent, alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_a^b f(x) dx.$$

Remarques 2 :

- a) Il faut s'assurer que les intégrales sont convergentes dans le théorème ci-dessus pour écrire une égalité.
- b) Si $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ est une bijection décroissante de classe $\mathcal{C}^1$, on a un résultat analogue avec

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_b^a f(x) dx.$$

- c) En pratique, le changement de variable s'effectue comme pour une intégrale sur un segment, à ceci près que a, b, α, β peuvent prendre les valeurs $\pm\infty$.

Exemple 4 : On souhaite étudier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$. En effectuant le changement de variable $x = \sin(t)$ dans I , on obtient l'intégrale

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} \cos(t) dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) dt.$$

Comme la fonction $t \mapsto \sin^2(t)$ est continue sur $[0, \pi/2]$, l'intégrale J est convergente. On en déduit par le théorème du changement de variable que l'intégrale I est convergente et que

$$I = J = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin(2t) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

II - Intégrale d'une fonction de signe constant

II.A - Intégrales de référence

Proposition 1 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ est convergente si et seulement si $\lambda > 0$.

Proposition 2 : L'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ est convergente.

Proposition (Intégrales de Riemann) : Soit $a \in \mathbb{R}$.

- (i) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a}$ est convergente si et seulement si $a > 1$.
- (ii) L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^a}$ est convergente si et seulement si $a < 1$.

II.B - Règles de comparaison

On fixe un intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$ avec avec $a < b \leq +\infty$.

Théorème de comparaison N° 1 : Soient $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues vérifiant $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in]a, b[$.

- (i) Si $\int_a^b g(t) dt$ est convergente, alors $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.
- (ii) Si $\int_a^b f(t) dt$ est divergente, alors $\int_a^b g(t) dt$ est divergente.

Exemple 5 : On souhaite étudier la convergence de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$. Comme

$$\left(\forall t \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2} \right) \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \text{ converge,}$$

on en déduit que l'intégrale I est convergente par comparaison.

Remarques 3 :

- a) Il suffit de vérifier l'inégalité $0 \leq f \leq g$ au voisinage de b .
 b) La règle s'adapte à des intégrales de fonctions continues sur $]a, b]$.

Théorème de comparaison N° 2 : Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Si f est de signe constant au voisinage de b^- et que $f(t) \sim_{b^-} g(t)$, alors

$$\int_a^b f(t) dt \text{ est convergente} \Leftrightarrow \int_a^b g(t) dt \text{ est convergente.}$$

Exemple 6 : On souhaite étudier la convergence de $I = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$. Comme

$$\frac{\sin(t)}{t} \underset{0^+}{\sim} \frac{t}{t} \underset{0^+}{\sim} 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 1 dt \text{ converge,}$$

on en déduit que l'intégrale I est convergente par comparaison.

Remarque 4 : La règle s'adapte à des intégrales de fonctions continues sur $]a, b]$.

III - Intégrabilité d'une fonction sur un intervalle

On considère un intervalle non-vidé I de $\mathbb{R}$ et l'on note $a = \inf I$ et $b = \sup I$. Ainsi, l'intervalle I est de la forme $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Définition (Fonction intégrable) : Une fonction continue $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dite intégrable sur I si $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente.

Remarques 5 :

- a) Une fonction continue $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est intégrable sur I si et seulement elle est intégrable sur $]a, b[$.
 b) Si f est intégrable sur I , on dit que $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente.

Théorème 1 : Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue et intégrable sur I , alors $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.

Remarque 6 : Autrement dit, si une intégrale converge absolument, alors elle est convergente.

Exemple 7 : On souhaite étudier la convergence de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$. Comme

$$\left(\forall t \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq \left| \frac{\sin(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2} \right) \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \text{ converge,}$$

on en déduit que l'intégrale I est absolument convergente par comparaison. On en déduit par le théorème précédent que l'intégrale I est convergente.

ATTENTION : La réciproque du théorème est fausse. On peut par exemple vérifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente, mais qu'elle ne converge pas absolument.

Notation : Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue et intégrable sur I , alors on note

$$\int_I f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Proposition 3 : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue et intégrable sur I .

- (i) On a l'inégalité

$$\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt.$$

- (ii) Si $\int_I |f(t)| dt = 0$, alors f est la fonction nulle sur I .

Proposition 4 : Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues et intégrables sur I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

(i) La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue et intégrable sur I et on a

$$\int_I (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_I f(t) dt + \mu \int_I g(t) dt.$$

(ii) Si f est positive sur I , alors $\int_I f(t) dt \geq 0$.

(iii) Si $f \leq g$ sur I , alors $\int_I f(t) dt \leq \int_I g(t) dt$.

Corollaire 1 : L'ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues et intégrables sur I est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

IV - Méthode : Étudier la convergence d'une intégrale

On souhaite étudier la convergence d'une intégrale $\int_a^b f(t) dt$ où f est une fonction définie au moins sur l'intervalle $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Méthode : Étudier la convergence d'une intégrale

- 1) On détermine si f est continue sur $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$.
 - a) Si f est continue sur $[a, b]$, l'intégrale est convergente.
 - b) Si f n'est que continue sur $]a, b[$, on sépare l'intégrale en deux pour se ramener au cas où seule une des deux extrémités de l'intervalle d'intégration est ouverte.
- 2) On est donc ramené au cas où f est continue sur $[a, b[$ (ou $]a, b]$). On essaye d'utiliser les différents résultats du cours pour décider de la nature de l'intégrale dans l'ordre suivant.
 - a) Si on connaît une primitive de f , on peut utiliser la définition pour étudier la convergence de l'intégrale.
 - b) Un équivalent de f ou de $|f|$ au voisinage de b ,
 - c) Une inégalité avec f ou avec $|f|$ valable au voisinage de b ,
 - d) Un changement de variable pour transformer l'intégrale.
- 3) Dans le cas où on avait séparé l'intégrale de départ en deux, on conclut (Par définition, l'intégrale converge si chacune des deux intégrales obtenus après la séparation converge).

Exemple 8 : Nous allons étudier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$.

La fonction $f : t \mapsto te^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour tout $\beta \in [0, +\infty[$, on a

$$\int_0^\beta te^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2} \right]_0^\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\beta^2} \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{2},$$

donc l'intégrale I converge et sa valeur est $1/2$.

Exemple 9 : Nous allons étudier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{\cos(t)e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On doit donc étudier la convergence des deux intégrales

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\cos(t)e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

- On a l'équivalent $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \geq 0$ et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc l'intégrale I_1 converge absolument par comparaison.
- On a l'inégalité $0 \leq |f(t)| \leq e^{-t}$ pour tout $t \in [1, +\infty[$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ est une intégrale de référence convergente, donc I_2 converge absolument par comparaison, donc I_2 converge.

Les intégrales I_1 et I_2 convergent, donc l'intégrale I est convergente.

Exemple 10 : Nous allons étudier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On doit donc étudier la convergence des deux intégrales

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

- On a l'équivalent $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t} \geq 0$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ est une intégrale de Riemann divergente, donc l'intégrale I_1 diverge par comparaison.
- Comme l'intégrale I_1 diverge, l'étude de la convergence de I_2 est inutile.

Comme l'intégrale I_1 diverge, on conclut que l'intégrale I diverge.

Exemple 11 : Nous allons étudier la convergence de l'intégrale

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{2 + \cos(t)}{t} dt.$$

La fonction $f : t \mapsto \frac{2 + \cos(t)}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$. On a l'inégalité $0 \leq \frac{1}{t} \leq f(t)$ pour tout $t \in [1, +\infty[$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est une intégrale de Riemann divergente, donc I diverge par comparaison.

Exemple 12 : Nous allons étudier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0, 1[$. En utilisant le changement de variable $u = 1 - t$ dans l'intégrale I , on obtient l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

L'intégrale J est une intégrale de Riemann convergente, donc l'intégrale I est convergente par le théorème du changement de variable. De plus, on a $I = J$.