CHAPITRE 6

Fonctions vectorielles et courbes paramétrées

Jérôme Von Buhren
http://vonbuhren.free.fr

Lycée Blaise Pascal - TSI

D'après le cours de première année, nous savons que toute droite $\mathscr{D}$ du plan admet une représentation paramétrique de la forme

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & x_0 + ta \\ y & = & y_0 + tb \end{array}\right.$$

où (x_0, y_0) est un point de $\mathscr{D}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$. Autrement dit, la droite $\mathscr{D}$ est l'image de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (x_0 + ta, y_0 + tb).$$

L'exemple précédent peut s'étendre à d'autres types de courbes que les droites. Par exemple, le cercle de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $R > 0$ est l'image de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t)).$$

Dans ce chapitre, nous allons voir comment étudier une courbe $\mathscr{C}$ définie comme l'image d'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ avec les outils de l'analyse. Nous commencerons par étendre les résultats classiques sur les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Nous verrons ensuite comment déterminer la tangente en un point de $\mathscr{C}$ si cette dernière existe, puis nous étudierons sa position relativement à la courbe. Nous terminerons ce chapitre en donnant une formule permettant de calculer la longueur de la courbe $\mathscr{C}$ entre deux de ses points.

En physique, on peut interpréter une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ comme le mouvement d'un objet dans le plan se trouvant en $f(t)$ à l'instant t. En particulier, l'image de l'application f représente la trajectoire de l'objet.

Dans tout le chapitre, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et un intervalle I contenant au moins deux points.

Définition (Fonction vectorielle)

Une fonction vectorielle est une application de la forme $f : I \to \mathbb{R}^n$.

Remarque 1

Si $f : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle, alors on peut l'écrire sous la forme $f = (x_1, \dots, x_n)$ où $x_i : I \to \mathbb{R}$ est une fonction pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$.

Exemple 1

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ est une fonction vectorielle. On peut écrire $f = (x, y)$ où les fonctions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont définies par $x(t) = \cos(t)$ et $y(t) = \sin(t)$.

Définition (Continuité et dérivabilité d'une fonction vectorielle)

On considère une fonction vectorielle $f = (x_1, \dots, x_n) : I \to \mathbb{R}^n$ et un point $a \in I$.

(i) On dit que f est continue en a si les fonctions $x_i : I \to \mathbb{R}$ sont continues en a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

(ii) On dit que f est continue sur I si les fonctions $x_i : I \to \mathbb{R}$ sont continues sur I pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

(iii) On dit que f est dérivable en a si les fonctions $x_i : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables en a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Dans ce cas, on note $f'(a) = (x_1'(a), \dots, x_n'(a))$.

(iv) On dit que f est dérivable sur I si les fonctions $x_i : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables sur I pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Exemple 2

La fonction vectorielle de l'exemple 1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ car les fonctions $x = \cos$ et $y = \sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = (-\sin(t), \cos(t)).$$

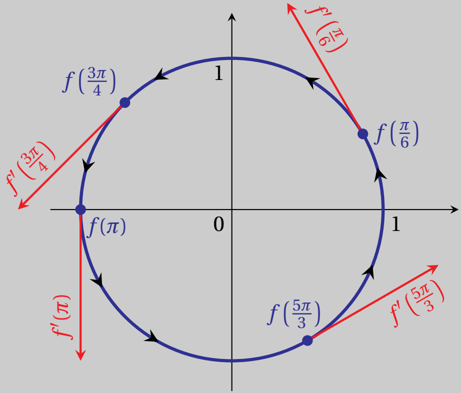
Remarques 2

a) Si la fonction vectorielle $f : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable sur l'intervalle I, alors l'application $f' : I \to \mathbb{R}^n$ est encore une fonction vectorielle.

b) On peut également définir la continuité à droite, la continuité à gauche, la dérivabilité à droite et la dérivabilité à gauche sur le même modèle.

Illustration

Si le déplacement d'un objet dans $\mathbb{R}^n$ est décrit par une fonction vectorielle $f : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$, alors $f'(a)$ représente le vecteur vitesse de l'objet à la position $f(a)$. En reprenant l'exemple 1, on a la représentation suivante.



Proposition 1

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ des fonctions vectorielles et $\lambda : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

(i) Si f et g sont dérivables sur I, alors la fonction vectorielle $f + g$ est dérivable sur I et on a $(f+g)' = f' + g'$.

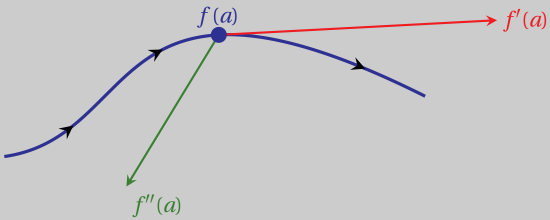
(ii) Si f et λ sont dérivables sur I, alors la fonction vectorielle λf est dérivable sur I et on a $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$.

Définition (Fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^k$)

Soit $k \in \mathbb{N}$. Une fonction vectorielle $f = (x_1, \dots, x_n) : I \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si les fonctions $x_i : I \to \mathbb{R}$ sont de classes $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Remarque 3

Si le déplacement d'un objet dans $\mathbb{R}^n$ est décrit par une fonction vectorielle $f : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^2$, alors $f''(a)$ représente le vecteur d'accélération de l'objet à la position $f(a)$.



Notation

Soit $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions vectorielles de I dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Proposition 2

Soit $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

Définition (Développement limité)

Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$, $a \in I$ et $k \in \mathbb{N}$. La fonction vectorielle f admet un développement limité en a à l'ordre k s'il existe des vecteurs $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $a + t \in I$, on a

$$f(a+t) = v_0 + v_1 t + \cdots + v_k t^k + o(t^k).$$

Remarques 4

a) Une fonction vectorielle est un $o(t^k)$ si toutes ses composantes sont des $o(t^k)$.

b) Si le développement limité de f au point a à l'ordre k existe, alors il est unique.

c) La fonction f admet un développement limité en a à l'ordre k si et seulement si chacune des composantes de la fonction f en admet un.

d) En pratique, on calcule le développement limité d'une fonction vectorielle composante par composante.

Exemple 3

Avec la fonction vectorielle de l'exemple 1 et $a = 0$, on a

$$f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/6 \end{pmatrix} t^3 + o(t^3).$$

Formule de Taylor-Young

Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^k$ et $a \in I$. Alors, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $a + t \in I$ la relation

$$f(a+t) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}t + \frac{f''(a)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}t^k + o(t^k).$$

Remarque 5

Par unicité du développement limité, on en déduit que si f est une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^k$, alors les vecteurs v_i de la définition d'un développement limité sont nécessairement donnés par

$$\forall i \in [\![0, k]\!], \quad v_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}.$$

Proposition (Dérivée d'un produit scalaire et d'une norme)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ des fonctions vectorielles dérivables.

(i) L'application $s : I \to \mathbb{R}$ définie par $s(t) = (f(t) \mid g(t))$ est dérivable sur I et pour tout $t \in I$, on a

$$s'(t) = (f'(t) \mid g(t)) + (f(t) \mid g'(t)).$$

(ii) Si $0 \notin f(I)$, l'application $n : I \to \mathbb{R}$ définie par $n(t) = \|f(t)\|$ est dérivable sur I et pour tout $t \in I$, on a

$$n'(t) = \frac{(f'(t) \mid f(t))}{\|f(t)\|}.$$

Proposition (Dérivée d'un produit vectoriel)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^3$ des fonctions vectorielles dérivables.
L'application $v : I \to \mathbb{R}$ définie par $v(t) = f(t) \wedge g(t)$ est dérivable sur I et pour tout $t \in I$, on a

$$v'(t) = f'(t) \wedge g(t) + f(t) \wedge g'(t).$$

Proposition (Dérivée d'un déterminant)

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}^n$ des fonctions vectorielles dérivables.

(i) Si $n = 2$, l'application $D : I \to \mathbb{R}$ définie par $D(t) = \det(f(t), g(t))$ est dérivable sur l'intervalle I et pour tout $t \in I$, on a

$$D'(t) = \det(f'(t), g(t)) + \det(f(t), g'(t)).$$

(ii) Si $n = 3$, l'application $D : I \to \mathbb{R}$ définie par $D(t) = \det(f(t), g(t), h(t))$ est dérivable sur l'intervalle I et pour tout $t \in I$, on a

$$D'(t) = \det(f'(t), g(t), h(t)) + \det(f(t), g'(t), h(t)) + \det(f(t), g(t), h'(t)).$$

Définition

Une courbe paramétrée est une fonction vectorielle $f : I \to \mathbb{R}^n$.

Remarques 6

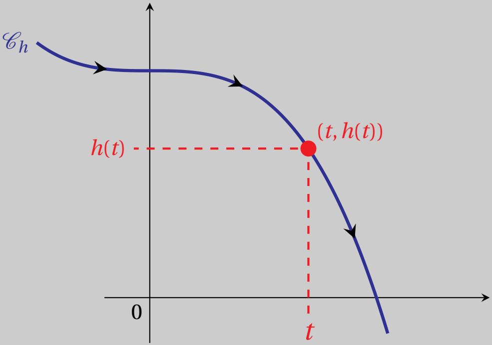
a) On utilise la terminologie de courbe paramétrée à la place de fonction vectorielle principalement lorsque l'on souhaite étudier l'ensemble $\mathscr{C} = f(I)$ géométriquement. On dit que $\mathscr{C}$ est la courbe paramétrée par f.

Remarques 6

b) Si $h : I \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle, alors sa courbe représentative

$$\mathscr{C}_h = \{(t, h(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I\}$$

est une courbe paramétrée par l'application $f : I \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (t, h(t))$.



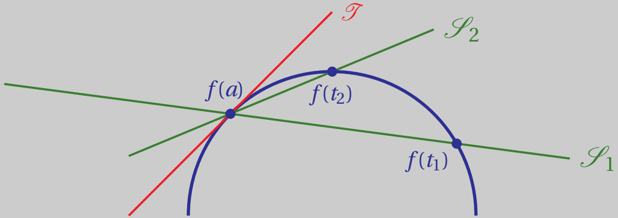
On fixe une courbe paramétrée par $f : I \to \mathbb{R}^n$ et un point $a \in I$. On suppose que si t est suffisamment proche de a et distinct de a, alors $f(t) \neq f(a)$.

Définition (Tangente)

La tangente en $f(a)$ à la courbe paramétrée par f est, sous réserve d'existence, la limite de la sécante passant par $f(a)$ et $f(t)$ quand $t \to a$.

Illustration

Sur le dessins ci-dessous, les droites $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ sont deux sécantes passant par $f(a)$ et $f(t)$ pour deux valeurs de t distinctes. La droite $\mathscr{T}$ est la tangente à la courbe paramétrée par f.



Remarque 7

Autrement dit, la tangente en $f(a)$ à la courbe paramétrée par f existe et est dirigée par un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si les limites

$$\lim_{t \to a^+} \frac{f(t) - f(a)}{\|f(t) - f(a)\|} \quad \text{et} \quad \lim_{t \to a^-} \frac{f(t) - f(a)}{\|f(t) - f(a)\|}$$

existent et sont colinéaires à v.

Théorème 1

On suppose que la fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur I et qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(k)}(a) \neq 0$. La tangente à la courbe paramétrée par f au point $f(a)$ existe et elle est dirigée par le premier vecteur non nul $f^{(p)}(a)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 8

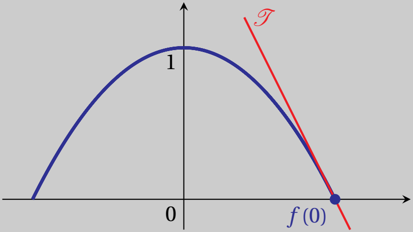
On a deux méthodes pour déterminer la direction de la tangente à la courbe paramétrée par f au point $f(a)$.

a) On peut effectuer un calcul direct des dérivées successive de f en a jusqu'à en trouver une non nulle.

b) On peut calculer un développement limité de f au point a à un ordre suffisant pour en déduire les dérivées successives de f en a.

Exemple 4

La courbe paramétrée par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\cos(t), \sin^2(t))$ admet une tangente $\mathscr{T}$ au point $f(0) = (1,0)$ dirigé par le vecteur $(-1,2)$, car la fonction vectorielle f est $\mathscr{C}^\infty$ et on a $f'(0) = (0,0)$ et $f''(0) = (-1,2)$.



Définition (Point régulier)

On dit qu'un point $f(a)$ est régulier si $f'(a)$ existe et est non nul.

Proposition 3

Si le point $f(a)$ est régulier, alors la tangente à la courbe paramétrée par f existe et elle est dirigée par $f'(a)$.

On considère une courbe paramétrée par $f : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose que les deux entiers ci-dessous existent.

$$p = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(a) \neq 0\right\},$$
$$q = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(a) \text{ n'est pas colinéaire à } f^{(p)}(a)\right\}.$$

On a toujours que $1 \leqslant p < q$ par définition.

Proposition 4

Avec les notations ci-dessus.

(i) Si l'entier q est pair, alors la tangente en $f(a)$ à la courbe paramétrée par f reste du même côté de la courbe au voisinage de $f(a)$.

(ii) Si l'entier q est impair, alors la tangente en $f(a)$ à la courbe paramétrée par f traverse la courbe en $f(a)$.

Définition

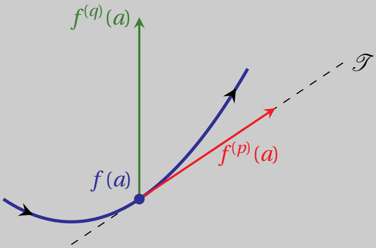
Dans le second cas, on dit que que $f(a)$ est un point d'inflexion de la courbe paramétrée.

Remarque 9

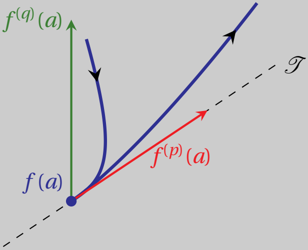
Si $f(a)$ est un point d'inflexion, alors $f'(a)$ et $f''(a)$ sont colinéaires.

Illustration

On peut représenter les quatre situations possibles avec les graphiques ci-dessous.



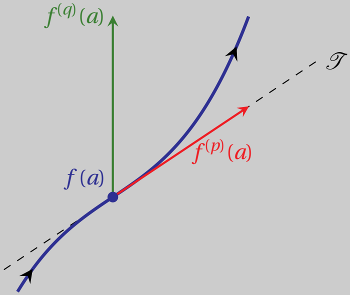
p impair, q pair



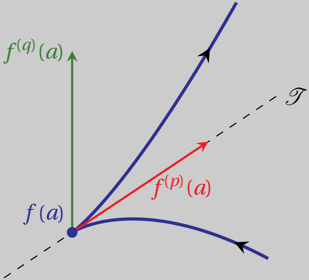
p pair, q pair

Illustration

On peut représenter les quatre situations possibles avec les graphiques ci-dessous.



p impair, q impair



p pair, q impair

Définition (Longueur d'une courbe)

Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ et $a, b \in I$ avec $a \leqslant b$. La longueur de la courbe paramétrée du point $f(a)$ au point $f(b)$ est

$$L_f(a,b) = \int_a^b \left\| f'(t) \right\| \mathrm{d}t.$$

Remarque 10

Si $f : I \to \mathbb{R}^n$ décrit la trajectoire d'un objet, alors le nombre $\left\| f'(t) \right\|$ est la vitesse de l'objet à l'instant t, ce qui permet d'interpréter cinématiquement la formule donnée dans la définition.

Exemple 5

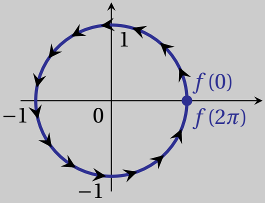
On considère la courbe paramétrée par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

La longueur de la courbe du point $f(0) = (1,0)$ au point $f(2\pi) = (1,0)$ est

$$L_f(0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}t = 2\pi.$$

On retrouve le périmètre du cercle trigonométrique.



ATTENTION

La terminologie « longueur de la courbe du point $f(a)$ au point $f(b)$ » peut être trompeuse dans certains cas.

Ainsi, en reprenant l'exemple précédent, on obtient que la longueur de la courbe du point $f(0)$ au point $f(4\pi)$ est égale à

$$L_f(0,4\pi) = \int_0^{4\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{4\pi} 1\,\mathrm{d}t = 4\pi,$$

tandis que le périmètre du cercle est seulement de 2π. Cette différence provient du fait que lorsque le variable t décrit l'intervalle $[0,4\pi]$, le point de coordonnées $f(t)$ fait deux fois le tour du cercle trigonométrique.

De manière plus précise, la formule de la définition donne la longueur du chemin parcouru par le point de coordonnées $f(t)$ lorsque t décrit l'intervalle $[a,b]$.

Remarque 11

Sous certaines conditions, on peut démontrer que la longueur d'une courbe paramétrée entre deux de ses points ne dépend pas de la paramétrisation choisie.

Par exemple, on considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^1$ et on définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ par $g(t) = f(2t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Le tracé de le courbe paramétrée par f est le même que celui de la courbe paramétrée par g. De plus, on a

$$f(a) = g\left(\frac{a}{2}\right) \quad \text{et} \quad f(b) = g\left(\frac{b}{2}\right),$$

puis en utilisant le changement de variable $t = 2u$, on obtient que

$$L_f(a,b) = \int_a^b \left\|f'(t)\right\| \,\mathrm{d}t = \int_{a/2}^{b/2} \left\|f'(2u)\right\| 2\,\mathrm{d}u = \int_{a/2}^{b/2} \left\|g'(u)\right\| \,\mathrm{d}u = L_g\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right).$$

On considère une courbe paramétrée par $f : I \to \mathbb{R}^2$. Nous allons voir comment exploiter les propriétés de la fonction $f = (x, y)$ pour restreindre l'intervalle d'étude.

III.A.1 - Périodicité

Si f est T-périodique, alors le point $f(t)$ est le même que le point $f(t+T)$, donc il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur T.

Propriété	Restriction	Transformation
x et y sont T-périodiques	Intervalle de longueur T	Identité

III.A.2 - Parité

Si x est paire et y est impaire, alors le point $f(-t)$ est l'image par la symétrie d'axe (Ox) du point $f(t)$. Il suffit donc de tracer la courbe paramétrée par f sur l'intervalle $I \cap \mathbb{R}_+$. On en déduire le tracé de la courbe sur l'intervalle I en entier en utilisant la symétrie par rapport à l'axe (Ox).

Tout les cas sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Propriété	Restriction	Transformation
x paire et y paire	$I \cap \mathbb{R}_+$	Identité
x paire et y impaire	$I \cap \mathbb{R}_+$	Symétrie par rapport à (Ox).
x impaire et y paire	$I \cap \mathbb{R}_+$	Symétrie par rapport à (Oy).
x impaire et y impaire	$I \cap \mathbb{R}_+$	Symétrie par rapport à O.

On considère une courbe paramétrée par $f : I \to \mathbb{R}^2$ que l'on suppose de classe $\mathscr{C}^1$. On souhaite tracer l'ensemble $f(I)$. On note $f = (x, y)$.

Méthode : Tracer une courbe paramétrée du plan

1) On détermine l'ensemble de définition de f et on essaye de restreindre l'intervalle d'étude (voir la partie précédente).
2) On dresse le tableau de variations de x et y sur I.
   a) On justifie que les fonctions x et y sont dérivables.
   b) On détermine les réels $t \in I$ vérifiant $x'(t) = 0$ ou $y'(t) = 0$.
   c) On dresse le tableau de signes de x' et y'.
   d) On en déduit le tableau de variations de x et y sur I.
3) On détermine les tangentes à la courbe paramétrée à chaque point $f(t)$ pour les valeurs de $t \in I$ apparaissant dans le tableau de variations.

Méthode : Tracer une courbe paramétrée du plan

4) On trace la courbe.
   a) On place sur le graphique les différents points $f(t)$ pour les valeurs de $t \in I$ apparaissant dans le tableau de variations.
   b) On trace en ces points les tangentes à la courbe paramétrée.
   c) On relie les points en respectant les tangentes et le sens de variation des fonctions x et y.
5) Afin d'obtenir toute la courbe, on effectue les transformations qui nous ont permis de restreindre l'intervalle d'étude.

Exemple 6

Nous allons tracer la courbe paramétrée par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (\cos(3t), \sin(2t)).$$

1) La fonction f est 2π-périodique, on peut donc restreindre l'étude à $[-\pi, \pi]$.
   De plus, la fonction x est paire et la fonction y est impaire, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$. Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport à (Ox).

Exemple 6

2) Dressons un tableau de variations pour x et y. Les fonctions x et y sont dérivables sur l'intervalle $[0, \pi]$ et on a

$$\begin{aligned} x'(t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -3\sin(3t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}, \\ y'(t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cos(2t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}. \end{aligned}$$

Exemple 6

2) On obtient donc le tableau de variations suivant.

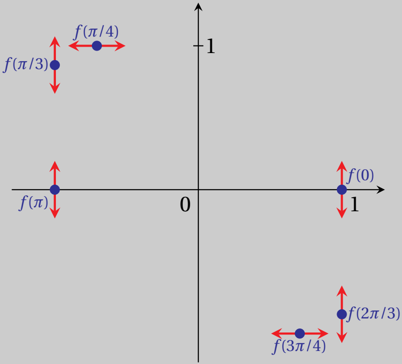
t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$x'(t)$	0		$-$		0	$+$	0		$-$		0
x	1	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1
$y'(t)$		$+$	0		$-$				0	$+$	
y	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	-1	↗	0

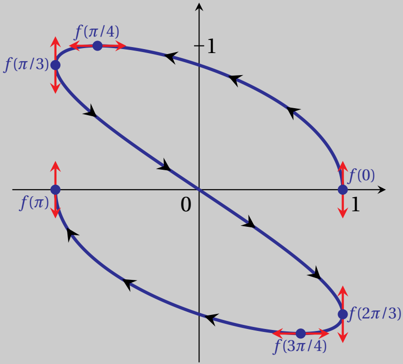
Exemple 6

3) On observe avec le tableau de variations que $f'(t) = (0, \alpha)$ avec $\alpha \neq 0$ pour chaque valeur $t \in \{0, \pi/3, 2\pi/3, \pi\}$. On en déduit qu'au point $f(t)$ correspondant, la tangente à la courbe paramétrée par f est verticale.
On observe avec le tableau de variations que $f'(t) = (\alpha, 0)$ avec $\alpha \neq 0$ pour chaque valeur $t \in \{\pi/4, 3\pi/4\}$. On en déduit qu'au point $f(t)$ correspondant, la tangente à la courbe paramétrée par f est horizontale.
   a) On place les points $f(t)$ pour chaque $t \in \{0, \pi/4, \pi/3, 2\pi/3, 3\pi/4, \pi\}$.
   b) On trace la tangente à la courbe en chacun de ces points.
   c) De $t = 0$ à $t = \pi/4$, la courbe va de $f(0)$ à $f(\pi/4)$. De plus, sur cet intervalle, la fonction x est décroissante et la fonction y est croissante, donc la courbe se dirige vers le haut à gauche. On relie donc le point $f(0)$ au point $f(\pi/4)$ en respectant les tangentes et la direction que suit la courbe. Ensuite, on répète l'opération sur les intervalles suivants.

Exemple 6

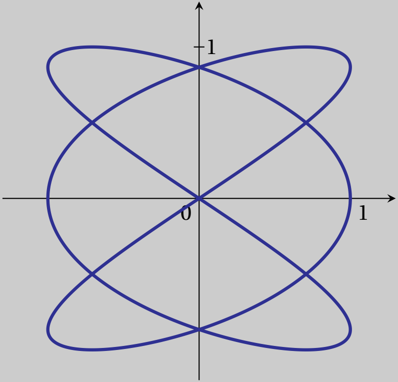
4) On obtient le tracé suivant de la courbe paramétré par f sur $[0, \pi]$.





Exemple 6

5) Pour obtenir le tracé sur $\mathbb{R}$ en entier, il suffit d'appliquer la symétrie par rapport à l'axe (Ox).



On considère une courbe paramétrée par $f : I \to \mathbb{R}^2$ que l'on suppose de classe $\mathscr{C}^\infty$. On souhaite déterminer les points d'inflexions de la courbe paramétrée par f.

Méthode : Déterminer les points d'inflexion d'une courbe paramétrée

1) On détermine les réels $a \in I$ tels que les vecteurs $f'(a)$ et $f''(a)$ soient colinéaires en utilisant le déterminant.
2) Pour chacun des réels $a \in I$ trouvés précédemment, on calcul les entiers p et q afin de déterminer si $f(a)$ est un point d'inflexion de la courbe ou non.

Exemple 7

On souhaite déterminer les points d'inflexions de la courbe paramétrée par la fonction vectorielle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (t + 2t^2 - t^3, t + 2t^2).$$

En notant $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \det_{\mathscr{C}}(f'(a), f''(a)) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 + 4a - 3a^2 & 4 - 6a \\ 1 + 4a & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 12a^2 + 6a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Exemple 7

On étudie si $f(0)$ et $f(-1/2)$ sont des points d'inflexion. Pour le point $f(0)$, on a

$$f'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^2}, \quad f''(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4f'(0), \quad f^{(3)}(0) = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc $p = 1$ et $q = 3$. Comme q est impair, on en déduit que $f(0)$ est un point d'inflexion de la courbe paramétrée par f. Pour le point $f(1/2)$, on a

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -7/4 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^2}, \quad f''\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = -4f'\left(-\frac{1}{2}\right), \quad f^{(3)}\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc $p = 1$ et $q = 3$. Comme q est impair, on en déduit que $f(-1/2)$ est un point d'inflexion de la courbe paramétrée par f.