CHAPITRE 6
Fonctions vectorielles et courbes paramétrées

Exercice 1 : La vitesse du point à l'instant $t \in I$ est $v(t) = \|f'(t)\|$. Comme f' ne s'annule pas sur I, la fonction v est dérivable sur I et on a

$$\forall t \in I, \quad v'(t) = \frac{(f'(t) \mid f''(t))}{\|f'(t)\|} = \|f''(t)\| \cos\left(f'(t), f''(t)\right).$$

1. Si le point se déplace à vitesse constante, alors $v' = 0$, donc les vecteurs $f'(t)$ et $f''(t)$ sont orthogonaux pour tout $t \in I$ d'après la formule précédente.
2. Si le point accélère, alors $v' \geqslant 0$, donc le cosinus de l'angle $\theta(t)$ entre les vecteurs $f'(t)$ et $f''(t)$ est positif pour tout $t \in I$ d'après la formule précédente. On en déduit que $\theta(t) \in [-\pi/2, \pi/2]$.
3. Si le point accélère, alors $v' \geqslant 0$, donc le cosinus de l'angle $\theta(t)$ entre les vecteurs $f'(t)$ et $f''(t)$ est négatif pour tout $t \in I$ d'après la formule précédente. On en déduit que $\theta(t) \in [\pi/2, 3\pi/2]$.

Exercice 2 : On définit la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u(t) & v(t) & w(t) \end{vmatrix}.$$

Comme u, v et w sont dérivables, la fonction f est dérivable sur $[a,b]$ d'après le cours. Comme $f(a) = f(b) = 0$, on obtient, d'après le théorème de Rolle, l'existence d'un point $d \in]a,b[$ tel que

$$0 = f'(d) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(d) & v'(d) & w'(d) \end{vmatrix}.$$

Finalement, $f'(a) = f'(d) = 0$ et f' est dérivable sur $[a,b]$ (car u, v et w sont de classe $\mathscr{C}^2$), donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,d[\subset [a,b]$ tel que

$$0 = f''(c) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix}.$$

Exercice 3 : D'après le cours, la fonction w est dérivable sur I et pour tout $t \in I$, on a

$$w'(t) = \begin{vmatrix} f'(t) & f'(t) \\ g'(t) & g'(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(t) & f''(t) \\ g(t) & g''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(t) & a(t)f'(t) + b(t)f(t) \\ g(t) & a(t)g'(t) + b(t)g(t) \end{vmatrix}.$$

En effectuant $C_2 \leftarrow C_2 - b(t)C_1$, puis en utilisant les linéarité sur la seconde colonne du déterminant, on obtient $w'(t) = a(t)w(t)$ qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 4 :

1. On note $v(t) = f(t) \wedge f'(t)$. La fonction f est dérivable et on a
$$f''(t) = f'(t) \wedge f'(t) + f(t) \wedge f''(t) = 0$$
par hypothèse. Ainsi, l'application v est constante.
2. Comme $f(a)$ et $f'(a)$ ne sont pas colinéaires, leur produit vectoriel $v(a)$ est un vecteur non nul. Comme l'application v est constante, on en déduit que
$$\forall t \in I, \quad (f(t) \mid v(a)) = (f(t) \mid v(t)) = 0.$$
On en déduit que les valeurs prises par $f(t)$ sont contenues dans le plan de vecteur normal $v(a)$ et passant par l'origine.
3. Par hypothèse, pour tout $t \in I$, il existe $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ tel que $f'(t) = \lambda(t) f(t)$. En notant x, y et z les coordonnées de f, on obtient les équations différentielles
$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = \lambda z.$$
Comme f ne s'annule pas, on peut écrire au voisinage de chaque point de I la fonction λ comme x'/x, y'/y ou z'/z. On en déduit que la fonction λ est

continue sur I. En notant Λ une primitive de λ sur I, puis en résolvant les trois équations différentielles ci-dessus, on conclut qu'il existe $(A,B,C)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$f(t)=\begin{pmatrix}A\mathrm{e}^{\Lambda(t)}\\B\mathrm{e}^{\Lambda(t)}\\C\mathrm{e}^{\Lambda(t)}\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{\Lambda(t)}\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}.$$

Ainsi, les valeurs prises par $f(t)$ sont incluses dans la droite vectorielle dirigée par le vecteur $(A,B,C)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 : En utilisant les développements limités usuels, on trouve

$$(i)\ \ f(t)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t^2+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}t^3+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t^4+o(t^4),$$

$$(ii)\ \ f(t)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\end{pmatrix}t^2+\begin{pmatrix}1/6\\0\end{pmatrix}t^3+\begin{pmatrix}1/24\\1/24\end{pmatrix}t^4+o(t^4),$$

$$(iii)\ \ f(t)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1/2\end{pmatrix}t^2+\begin{pmatrix}-1/3\\-1/8\end{pmatrix}t^4+o(t^4),$$

$$(iv)\ \ f(1+t)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t^2+\begin{pmatrix}-1\\1/2\end{pmatrix}t^3+\begin{pmatrix}11/12\\1/3\end{pmatrix}t^4+o(t^4),$$

$$(v)\ \ f(1+t)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\pi\\4\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}\pi^2/2\\6\end{pmatrix}t^2+\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}t^3+\begin{pmatrix}-\pi^4/8\\1\end{pmatrix}t^4+o(t^4),$$

$$(vi)\ \ f(\pi+t)=\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^{\pi}\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^{\pi}\\0\end{pmatrix}t^2+\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^{\pi}/3\\-1\end{pmatrix}t^3+o(t^4).$$

Exercice 6 : La fonction x est paire et la fonction y est impaire, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0,+\infty[$. Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport à (Ox).
Les fonctions x et y sont dérivables et on a

$$x'(t)=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\quad\text{et}\quad y'(t)=\frac{t^2(t^2+3)}{(1+t^2)^2}.$$

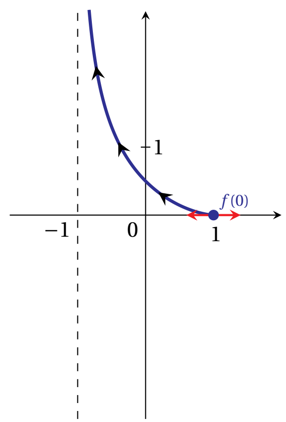
On obtient donc le tableau de variations suivant.

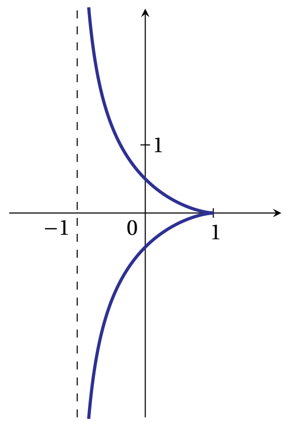
t	0	$+\infty$
$x'(t)$	0	$-$
x	1 ↘	-1
$y'(t)$	0	$+$
y	0 ↗	$+\infty$

Pour déterminer la tangente $f(0)$ qui est un point singulier, on calcule un développement limité de f en 0. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et on a

$$f(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\\dfrac{t^3}{1+t^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}t^2+o(t^2),$$

donc la tangente en $f(0)$ est horizontale. On en déduit le tracé sur $[0,+\infty[$, puis en appliquant la symétrie par rapport à l'axe (Ox), on obtient le tracé sur $\mathbb{R}$.





Exercice 7 : La fonction x est impaire et la fonction y est impaire, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0,+\infty[$. Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport au point O.
Les fonctions x et y sont dérivables et on a

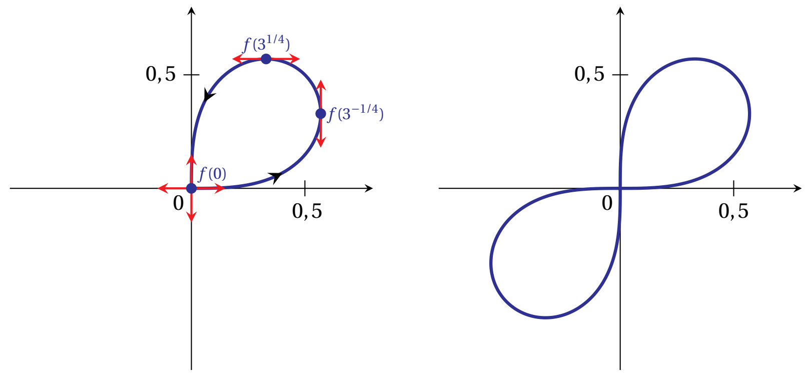
$$x'(t)=\frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2} \quad \text{et} \quad y'(t)=\frac{t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2}.$$

On obtient donc le tableau de variations suivant.

t	0		$3^{-1/4}$		$3^{1/4}$		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$			
x	0	$\nearrow$	$\frac{3^{3/4}}{4}$	$\searrow$	$\frac{3^{1/4}}{4}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$			0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3^{1/4}}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3^{3/4}}{4}$	$\searrow$	0

Les tangentes en $f(0)$ et $f(3^{1/4})$ sont horizontales et la tangente en $f(3^{-1/4})$ est verticale. On admet que la tangente en $f(t)$ lorsque $t\to+\infty$ est verticale.

On en déduit le tracé sur $[0,+\infty[$, puis en appliquant la symétrie par rapport au point O, on obtient le tracé sur $\mathbb{R}$.



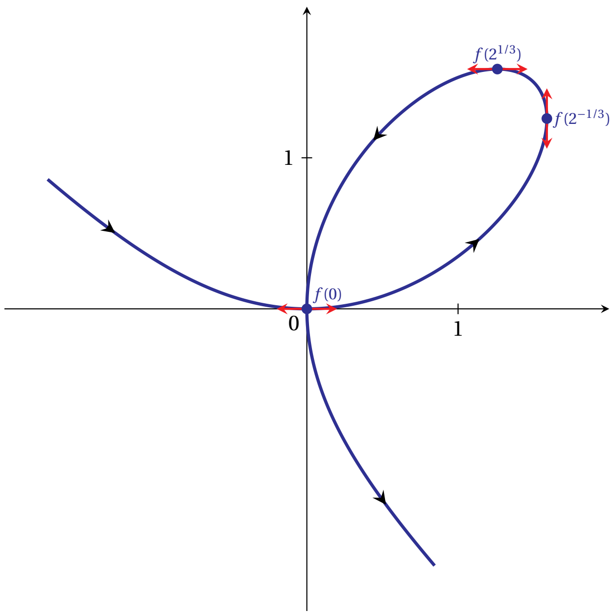
Exercice 8 : Les fonctions x et y sont dérivables et on a

$$x'(t)=\frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \quad \text{et} \quad y'(t)=\frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

On obtient donc le tableau de variations suivant.

t	$-\infty$		-1		0		$2^{-1/3}$		$2^{1/3}$		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	‖		$+$		0		$-$		
x	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2^{2/3}$	$\searrow$	$2^{1/3}$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$-$	‖	$-$	0		$+$		0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2^{1/3}$	$\nearrow$	$2^{2/3}$	$\searrow$	0

Les tangentes en $f(0)$ et $f(2^{1/3})$ sont horizontales. La tangente en $f(2^{-1/3})$ est verticale. On admet que la tangente en $f(t)$ lorsque $t \to -\infty$ est verticale et que la tangente en $f(t)$ lorsque $t \to +\infty$ est verticale.
On en déduit le tracé sur $\mathbb{R}$.



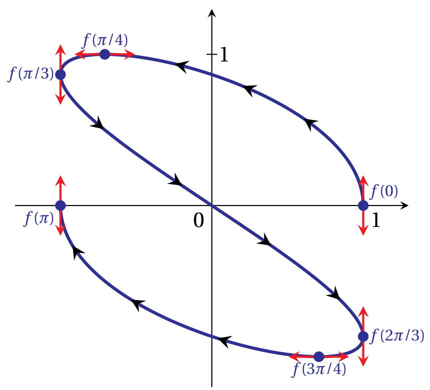
Exercice 9 : La fonction f est 2π-périodique, on peut donc restreindre l'étude à l'intervalle $[-\pi, \pi]$. De plus, la fonction x est paire et la fonction y est impaire, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$. Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport à (Ox).
Les fonctions x et y sont dérivables et on a

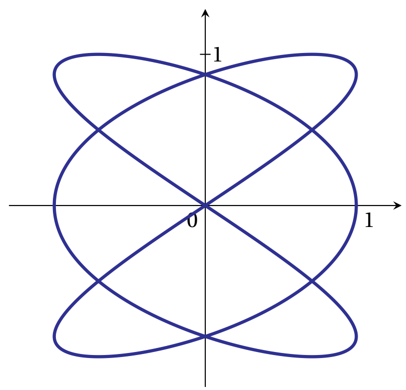
$$x'(t) = -3\sin(3t) \quad \text{et} \quad y'(t) = 2\cos(2t).$$

On obtient donc le tableau de variations suivant.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$x'(t)$	0		$-$		0	$+$	0		$-$		0
x	1	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1
$y'(t)$		$+$	0			$-$			0	$+$	
y	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	-1	↗	1

On observe qu'au point $f(t)$ pour $t = 0, \pi/3, 2\pi/3$ ou $t = \pi$, la tangente à la courbe est verticale. De même, on observe qu'au point $f(t)$ pour $t = \pi/4$ ou $3\pi/4$, la tangente à la courbe est horizontale.
On en déduit le tracé sur $[0, \pi]$, puis avec une symétrie par rapport à l'axe (Ox) sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.





Exercice 10 : La fonction f est 2π-périodique, on peut donc restreindre l'étude à l'intervalle $[-\pi,\pi]$. De plus, la fonction x est paire et la fonction y est impaire, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0,\pi]$. Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport à (Ox).
Les fonctions x et y sont dérivables et on a

$$x'(t) = -4\sin(2t) \quad \text{et} \quad y'(t) = 3\cos(3t).$$

On obtient donc le tableau de variations suivant.

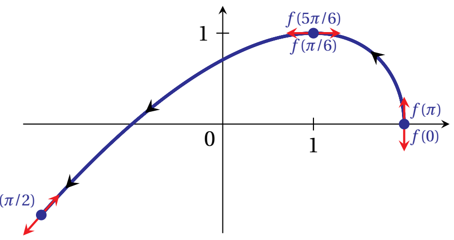
t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$x'(t)$	0		$-$		0		$+$		0
x	2		1		-2		1		2
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0		1		-1		1		0

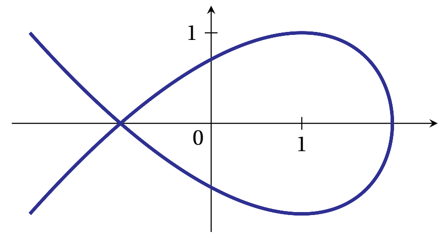
Les tangentes aux points $f(0)$ et $f(\pi)$ sont verticales, tandis que les tangentes aux points $f(\pi/6)$ et $f(5\pi/6)$ sont horizontales. Pour déterminer la tangente au point singulier $f(\pi/2)$, on calcule les dérivées successives de f en $\pi/2$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et on a

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix},$$

donc la tangente en $f(\pi/2)$ est dirigé par le vecteur $(8,9)$.

On en déduit le tracé sur l'intervalle $[0,\pi]$, puis en appliquant une symétrie par rapport à l'axe (Ox) sur $[-\pi,\pi]$.





Exercice 11 : La fonction f est 2π-périodique, on peut donc restreindre l'étude à l'intervalle $[-\pi,\pi]$. De plus, la fonction x est paire et la fonction y est impaire, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à l'intervalle $[0,\pi]$. Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport à (Ox).
Les fonctions x et y sont dérivables et on a

$$x'(t) = -2\sin(t) - 2\sin(2t) \quad \text{et} \quad y'(t) = 2\cos(t) - 2\cos(2t).$$

On obtient donc le tableau de variations suivant.

t	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
x	3		$-\frac{3}{2}$		-1
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	
y	0		$\frac{3\sqrt{3}}{2}$		0

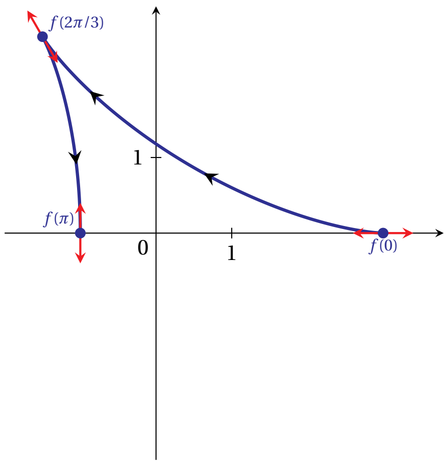
La tangente au point $f(\pi)$ est verticale. Pour déterminer la tangente au point $f(0)$ qui est singulier, on calcule les dérivées successives de la fonction f en 0. La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ et on a

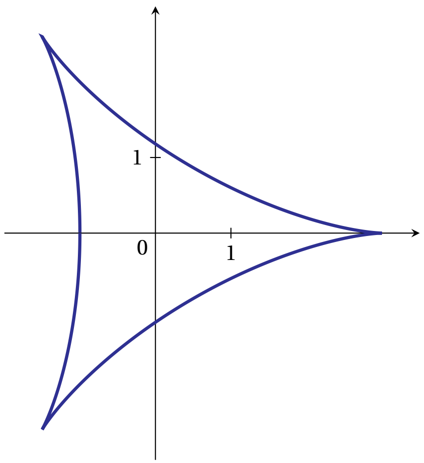
$$f''(0) = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc la tangente en $f(0)$ est horizontale. De même, pour le point $f(2\pi/3)$, on trouve

$$f''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

donc la tangente en $f(2\pi/3)$ est dirigé par le vecteur $(1, -\sqrt{3})$.
On en déduit le tracé sur $[0, \pi]$, puis avec une symétrie par rapport à l'axe (Ox) sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.





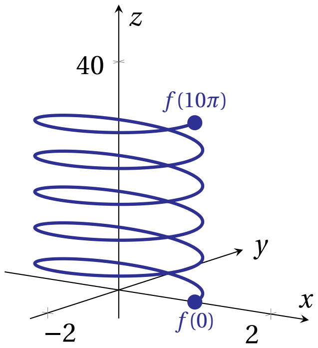
Exercice 12 :

1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Si $f(t)$ est un point d'inflexion, alors les vecteurs $f'(t)$ et $f''(t)$ sont colinéaires. Si on note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a
$$\det_{\mathscr{C}}(f'(t), f''(t)) = \begin{vmatrix} 3(t-2)^2 & 6(t-2) \\ 2t & 2 \end{vmatrix} = -6(t-2)(t+2).$$
Ainsi, les points d'inflexions possibles sont $f(2)$ et $f(-2)$. On a
$$f(2+t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ (2+t)^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^3 + o(t^3).$$
Avec les notations du cours, on a $p = 1$ et $q = 3$, donc $f(2)$ est un point d'inflexion de la courbe paramétré par f. De même, on a
$$f(-2+t) = \begin{pmatrix} -64 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 48 \\ -4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^3 + o(t^3).$$
Avec les notations du cours, on a $p = 1$ et $q = 3$, donc $f(-2)$ est un point d'inflexion de la courbe paramétré par f.
2. La tangente en $f(2) = (0,0)$ est dirigé par $f'(2) = (0,4)$, donc une équation de la tangente en $f(2)$ est $x = 0$.
La tangente en $f(-2) = (-64, 0)$ est dirigé par $f'(2) = (48, -4)$, donc une équation de la tangente en $f(-2)$ est $12y + x + 64 = 0$.

Exercice 13 :

1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Si $f(t)$ est un point d'inflexion, alors les vecteurs $f'(t)$ et $f''(t)$ sont colinéaires. Si on note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a
$$\det_{\mathscr{C}}(f'(t), f''(t)) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t \\ 2t & 2 \end{vmatrix} = 2\mathrm{e}^t(1-t).$$
Ainsi, le point d'inflexion possible est $f(1)$. On a
$$f(1+t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{1+t} \\ (1+t)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{e} \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \mathrm{e}/2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} \mathrm{e}/6 \\ 0 \end{pmatrix} t^3 + o(t^3).$$
Avec les notations du cours, on a $p = 1$ et $q = 3$, donc $f(1)$ est un point d'inflexion de la courbe paramétré par f.
2. La tangente en $f(1) = (\mathrm{e}, 1)$ est dirigé par $f'(1) = (\mathrm{e}, 2)$, donc une équation de la tangente en $f(1)$ est $2x - \mathrm{e}y - \mathrm{e} = 0$.

Exercice 14 : On peut représenter la courbe paramétrée par f.



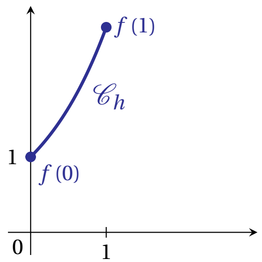
La fonction $f : [0, 10\pi] \to \mathbb{R}^3$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\forall t \in [0, 10\pi], \quad f'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1).$$

On obtient donc $\|f'(t)\| = \sqrt{2}$, puis

$$L = \int_0^{10\pi} \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^{10\pi} \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = 10\pi\sqrt{2}.$$

Exercice 15 : On peut représenter la courbe représentative de h.



La courbe $\mathscr{C}_h$ est paramétrée par $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (t, \exp(t))$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$\forall t \in [0,1], \quad f'(t) = \big(1, \exp(t)\big).$$

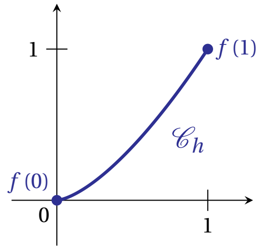
On obtient donc $\|f'(t)\| = \left(1 + \mathrm{e}^{2t}\right)^{1/2}$, puis

$$L = \int_0^1 \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1 + \mathrm{e}^{2t}\right)^{1/2} \mathrm{d}t.$$

En procédant au changement de variable $u = \left(1 + \mathrm{e}^{2t}\right)^{1/2}$, on obtient

$$\begin{aligned} L &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}^2}} \frac{u^2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}^2}} 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) \mathrm{d}u \\ &= \left[u + \frac{1}{2}\left(\ln(u-1) - \ln(u+1)\right)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}^2}} \\ &= \sqrt{1+\mathrm{e}^2} - \sqrt{2} + \ln(\sqrt{1+\mathrm{e}^2} - 1) - \ln(\sqrt{2} - 1) - 1. \end{aligned}$$

Exercice 16 : On peut représenter la courbe représentative de h.



La courbe $\mathscr{C}_h$ est paramétrée par $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (t, t^{3/2})$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f'(t) = \left(1, \frac{3}{2}\sqrt{t}\right).$$

On obtient donc $\|f'(t)\| = \left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{1/2}$, puis

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{1/2} \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}. \end{aligned}$$

Exercice 17 :

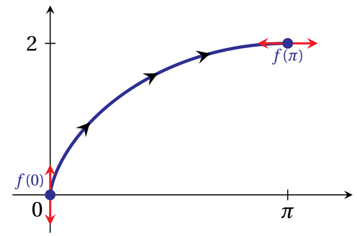
1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$f(t+2\pi) = f(t) + (2\pi, 0).$$
On en déduit que pour passer de $f(t)$ à $f(t+2\pi)$, on utiliser la translation de vecteur $(2\pi, 0)$.

2. D'après la relation précédente, on peut restreindre l'étude à $[-\pi, \pi]$. Le reste du tracé s'en déduira en appliquant les translations de vecteur $(2k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. De plus, la fonction x est impaire et la fonction y est paire, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$. Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport à (Oy).
Les fonctions x et y sont dérivables et on a
$$x'(t) = 1 - \cos(t) \quad \text{et} \quad y'(t) = \sin(t).$$
On obtient donc le tableau de variations suivant.

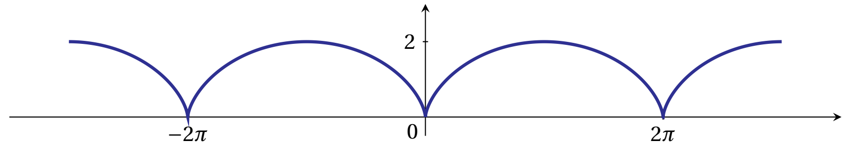
t	0		π
$x'(t)$	0	$+$	
x	0	$\nearrow$	π
$y'(t)$	0	$+$	0
y	0	$\nearrow$	2

La tangente en $f(\pi)$ est horizontale. Pour déterminer la tangente au point singulier $f(0)$, on calcule les dérivées successives de f en 0. La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ et on a
$$f''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
donc la tangente en $f(0)$ est verticale.

On en déduit le tracé sur $[0, \pi]$.



En appliquant la symétrie par rapport à l'axe (Oy), on en déduit la tracé sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, puis en appliquant les translations de vecteur $(2k\pi, 0)$ pour chaque entier $k \in \mathbb{Z}$, on obtient le tracé sur $\mathbb{R}$.



3. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a
$$\begin{aligned}\|f'(t)\| &= \left[(1-\cos(t))^2 + (\sin(t))^2\right]^{1/2} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(t)} = \sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right).\end{aligned}$$
On obtient donc
$$L = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| \,\mathrm{d}t = 2\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t = 2\left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 8.$$

Exercice 18 :

1. La fonction f est 2π-périodique, on peut donc restreindre l'étude à $[-\pi, \pi]$. De plus, la fonction x est paire et la fonction y est impaire, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$. Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport à (Ox).
Les fonctions x et y sont dérivables et on a
$$x'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t) \quad \text{et} \quad y'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t).$$

On obtient donc le tableau de variations suivant.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$-$	0
x	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Pour déterminer les tangentes en $f(0)$, $f(\pi/2)$ et $f(\pi)$ qui sont des points singuliers, on calcule des développements limités. La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ et on a

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + o(t^2),$$

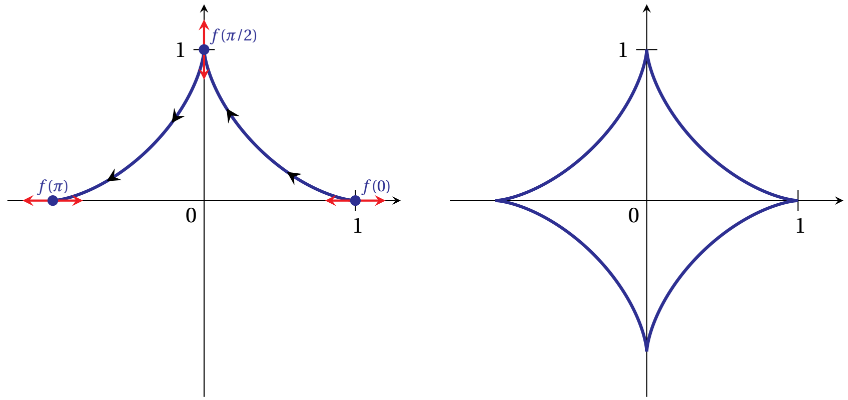
donc la tangente en $f(0)$ est horizontale. On a

$$f\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = \begin{pmatrix} \cos^3(\pi/2+t) \\ \sin^3(\pi/2+t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin^3(t) \\ \cos^3(t) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} t^2 + o(t^2),$$

donc la tangente en $f(\pi/2)$ est verticale. On a

$$f(\pi+t) = \begin{pmatrix} \cos^3(\pi+t) \\ \sin^3(\pi+t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^3(t) \\ -\sin^3(t) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + o(t^2),$$

donc la tangente en $f(\pi)$ est horizontale.
On en déduit le tracé sur $[0,\pi]$, puis en appliquant la symétrie par rapport à l'axe (Ox), on obtient le tracé sur $[-\pi,\pi]$.



2. Pour tout $t \in [0,2\pi]$, on a

$$\|f'(t)\| = \left[(-3\sin(t)\cos^2(t))^2 + (3\cos(t)\sin^2(t))^2\right]^{1/2}$$
$$= 3\sqrt{\cos^2(t)\sin^2(t)} = 3|\cos(t)\sin(t)|.$$

Comme la fonction $t \mapsto 3|\cos(t)\sin(t)|$ est $\pi/2$ - périodique, on obtient

$$L = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\pi/2} 3\cos(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= 6\int_0^{\pi/2} \sin(2t)\,\mathrm{d}t = 3[-\cos(2t)]_0^{\pi/2} = 6.$$

Exercice 19 :

1. La fonction f est 2π-périodique, on peut donc restreindre l'étude à $[-\pi,\pi]$. De plus, la fonction x est paire et la fonction y est impaire, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0,\pi]$. Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport à (Ox).
   Les fonctions x et y sont dérivables et on a

$$x'(t) = -2\sin(t) - 2\sin(2t) \quad \text{et} \quad y'(t) = 2\cos(t) + 2\cos(2t).$$

   On obtient donc le tableau de variations suivant.

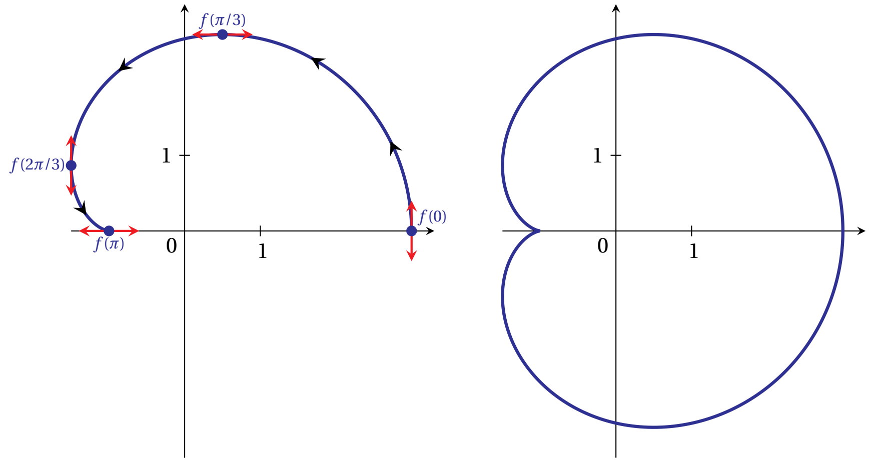
t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0		$-$		0	$+$	0
x	3	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	-1
$y'(t)$		$+$	0		$-$		0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

   Avec le tableau de variations, on observe qu'aux points $f(0)$ et $f(2\pi/3)$, les tangentes à la courbe sont verticales. De même, on observe qu'au point $f(\pi/3)$, la tangente à la courbe est horizontale. Pour déterminer la tangente en $f(\pi)$ qui est un point singulier, on calcule les dérivées successives de la fonction f en π. La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ et on a

$$f''(\pi) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   donc la tangente en $f(\pi)$ est horizontale.

   On en déduit le tracé sur $[0,\pi]$, puis en appliquant la symétrie par rapport à l'axe (Ox), on obtient le tracé sur $[-\pi,\pi]$.



2. Par symétrie, la longueur de la courbe est le double de la longueur de la courbe du point $f(0)$ à $f(\pi)$. Pour tout $t \in [0,\pi]$, on a

$$\begin{aligned} \|f'(t)\| &= \left[(-2\sin(t) - 2\sin(2t))^2 + (2\cos(t) + 2\cos(2t))^2\right]^{1/2} \\ &= 2\sqrt{2 + 2\cos(t)} = 4\sqrt{\cos\left(\frac{t}{2}\right)^2} = 4\cos\left(\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

   On obtient donc

$$L = 2\int_0^\pi \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t = 8\int_0^\pi \cos\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = 8\left[2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^\pi = 16.$$