# CHAPITRE 6
# Fonctions vectorielles et courbes paramétrées

## I - Fonctions vectorielles

**Exercice 1 :** Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^2$ décrivant le déplacement d'un point dans le plan. On suppose que $f'$ et $f''$ ne s'annule pas sur $I$.

1. Montrer que le point se déplace à vitesse constante si et seulement si le vecteur d'accélération et le vecteur vitesse sont orthogonaux.
2. Montrer que le point accélère si et seulement si l'angle entre le vecteur d'accélération et le vecteur vitesse est dans $[-\pi/2, \pi/2]$.
3. Montrer que le point décélère si et seulement si l'angle entre le vecteur d'accélération et le vecteur vitesse est dans $[\pi/2, 3\pi/2]$.

**Exercice 2 :** Soient $u, v, w : [a, b] \to \mathbb{R}$ trois fonctions de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ vérifiant

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$$

**Exercice 3** (Wronskien) **:** Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On considère deux solutions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'' = ay' + by.$$

Montrer que la fonction $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$w(t) = \begin{vmatrix} f(t) & f'(t) \\ g(t) & g'(t) \end{vmatrix}$$

est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

**Exercice 4 :** Soit $f : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^2$ telle que

$$\forall t \in I, \quad f''(t) \in \text{Vect}(f(t)).$$

1. Montrer que l'application $t \mapsto f(t) \wedge f'(t)$ est constante.
2. On suppose qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a)$ et $f'(a)$ ne sont pas colinéaires. Montrer que les valeurs prises par $f(t)$ sont contenues dans un plan.
3. On suppose que $f$ ne s'annule pas et qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a)$ et $f'(a)$ sont colinéaires. Montrer que l'image de $f$ est contenue dans une droite.

**Exercice 5 :** Calculer des développements limités à l'ordre 4 des fonctions vectorielles suivantes.

$(i)$ $f(t) = ((1-t)^{-1}, (1+t)^{-1})$ en 0, $(ii)$ $f(t) = (\exp(t), \cos(t))$ en 0,
$(iii)$ $f(t) = (\sin^2(t), \sqrt{1-t^2})$ en 0, $(iv)$ $f(t) = (\ln^2(t), t^t)$ en 1,
$(v)$ $f(t) = (\mathrm{e}^{\sin(\pi t)}, t^4)$ en 1, $(vi)$ $f(t) = (\sin(t)\exp(t), \sin^3(t))$ en $\pi$.

## II - Études de courbes paramétrées

**Exercice 6 :** Tracer la courbe paramétrée par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2}\right).$$

**Exercice 7** (Lemniscate de Bernoulli) **:** Tracer la courbe paramétrée par la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad f(t)=\left(\frac{t}{1+t^4},\frac{t^3}{1+t^4}\right).$$

**Exercice 8** (Folium de Descartes) **:** Tracer la courbe paramétrée par la fonction vectorielle $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad f(t)=\left(\frac{3t}{1+t^3},\frac{3t^2}{1+t^3}\right).$$

**Exercice 9** (Courbe de Lissajous) **:** Tracer la courbe paramétrée par la fonction vectorielle $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(t)=(\cos(3t),\sin(2t))$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

**Exercice 10 :** Tracer la courbe paramétrée par la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(t)=(2\cos(2t),\sin(3t))$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

**Exercice 11** (Deltoïde) **:** Tracer la courbe paramétrée par $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(t)=(2\cos(t)+\cos(2t),2\sin(t)-\sin(2t))$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

**Exercice 12 :** On considère la courbe paramétrée par la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(t)=((t-2)^3,t^2-4)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer les points d'inflexions de la courbe.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en ces points.

**Exercice 13 :** On considère la courbe paramétrée par la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(t)=(\exp(t),t^2)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer les points d'inflexions de la courbe.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en ces points.

**Exercice 14** (Hélice circulaire) **:** Calculer la longueur de la courbe paramétrée par la fonction $f:[0,10\pi]\to\mathbb{R}^3$ définie par $f(t)=(\cos(t),\sin(t),t)$ pour tout $t\in[0,10\pi]$.

**Exercice 15 :** On considère la fonction $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $h(t)=\exp(t)$ pour tout $t\in[0,1]$. Calculer la longueur de la courbe représentative de $h$.

**Exercice 16 :** On considère la fonction $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $h(t)=t^{3/2}$. Calculer la longueur de la courbe représentative de $h$.

**Exercice 17** (Cycloïde) **:** On considère la courbe paramétrée par $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(t)=(t-\sin(t),1-\cos(t))$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

1. Quelle transformation géométrique envoie le point $f(t)$ sur le point $f(t+2\pi)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ ?
2. Tracer la courbe paramétrée par $f$.
3. Calculer la longueur de la courbe du point $f(0)$ au point $f(2\pi)$.

**Exercice 18** (Astroïde) **:** On considère la courbe paramétrée par $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(t)=(\cos^3(t),\sin^3(t))$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

1. Tracer la courbe paramétrée par $f$.
2. Calculer la longueur de la courbe.

**Exercice 19** (Cardioïde) **:** On considère la courbe paramétrée par $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(t)=(2\cos(t)+\cos(2t),2\sin(t)+\sin(2t))$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

1. Tracer le courbe paramétrée par $f$.
2. Calculer la longueur de la courbe.