CHAPITRE 14
Fonctions de plusieurs variables

I - Continuité et dérivées partielles d'une application

Exercice 1 : Soient $a, b > 0$. On définit l'application $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^a y^b}{x^2 + y^2}.$$

Pour quelles valeurs de (a, b) la fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 2 : On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3 : On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.

Exercice 4 : On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

II - Équations aux dérivées partielles

Exercice 5 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \qquad (E)$$

On pourra utiliser le changement de variables $(u, v) = (2x + y, 3x + y)$.

Exercice 6 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = f. \qquad (E)$$

On pourra utiliser le changement de variables $(u, v) = (x + y, 2x + 3y)$.

Exercice 7 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = f. \qquad (E)$$

On pourra utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 8 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}. \qquad (E)$$

On pourra utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 9 : Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0. \qquad (E)$$

On pourra utiliser le changement de variables $(u,v)=(x+y,x-y)$.

Exercice 10 : Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée de la fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$F(t)=f(x+t,y+t)-f(x,y).$$

2. Montrer que la fonction f vérifie la relation

$$\forall (x,y,t)\in\mathbb{R}^3,\quad f(x+t,y+t)=f(x,y).$$

si et seulement si f est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$$

Exercice 11 : Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$(i)\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & y\mathrm{e}^{xy}+3\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & x\mathrm{e}^{xy},\end{array}\right. \qquad (ii)\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \mathrm{e}^{x}y\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \mathrm{e}^{x}+2y,\end{array}\right.$$

$$(iii)\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \sin(xy)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \cos(xy),\end{array}\right. \qquad (iv)\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \mathrm{e}^{x}+y\cos(xy)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & x\cos(xy).\end{array}\right.$$

III - Extremums d'une fonction

Exercice 12 : Déterminer les extremums de $f:T\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=xy(1-x-y)$$

avec $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 1\}$.

Exercice 13 : Déterminer les extremums de $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\sin(x)\sin(y)\sin(x+y).$$

Exercice 14 : Déterminer les extremums de $f:[0,1]^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=x-y+x^3+y^3.$$

Exercice 15 : Déterminer les extremums de $f:D\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$$

avec $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 4\}$.

Exercice 16 : Déterminer les extremums de $f:D\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=y^2-x^2y+x^2$$

avec $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid\ x^2-1\leqslant y\leqslant 1-x^2\}$.

Exercice 17 : Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon 1. Quel est le périmètre maximal d'un triangle dont les sommets sont sur $\mathscr{C}$?