CHAPITRE 14
Fonctions de plusieurs variables

Plan du chapitre

Introduction

La notion de fonctions de plusieurs variables apparait très tôt en physique où l'on étudie souvent des grandeurs dépendant de plusieurs paramètres. Le mathématicien écossais James Gregory en donne une des premières définitions formelles dans ses traités *Vera circuli* et *hyperbolae quadratura* publiés en 1667 : « une fonction est une quantité obtenue à partir d'autres quantités par une succession d'opérations algébriques ou par n'importe quelle opération imaginable ».

La notion de dérivée partielle s'est développée à la fin de XVII^e siècle lorsque Newton fonda le calcul différentiel. Durant cette période, les fonctions de plusieurs variables gagnent en importance : de nombreux problèmes issus de la géométrie ou de la mécanique conduisaient naturellement à la résolution d'équations aux dérivées partielles.

Il subsiste néanmoins des faiblesses dans l'utilisation des fonctions de plusieurs variables : elle manque de rigueur, principalement à cause de la mauvaise compréhension de la notion de fonction à cette époque. Il faut attendre la fin du XIXe siècle et le XXe siècle pour voir les techniques se formaliser, notamment celles portant sur les dérivées partielles.

Dans ce chapitre, on commencera par introduire les bases de la topologie afin de généraliser notamment les notions d'intervalle ouvert et de segment. Dans un second temps, nous étendrons la notion de continuité et les outils du calcul différentiel aux fonctions de plusieurs variables. Nous verrons notamment comment résoudre certaines équations aux dérivées partielles et comment déterminer les extremums globaux d'une fonction de deux variables.

Dans tout le chapitre, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

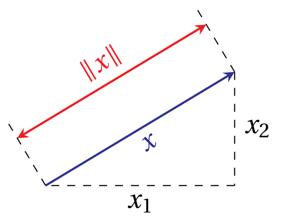
I - Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$

I.A - La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$

Définition (Norme euclidienne) : La norme euclidienne sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est l'application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Illustration : La norme permet de mesurer la longueur d'un vecteur comme le montre la figure ci-dessous.



Proposition 1 : La norme euclidienne vérifie les propriétés suivantes.

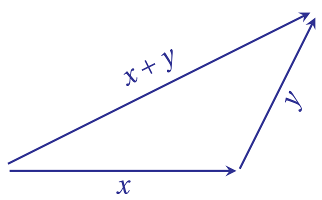
(i) Positivité : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\| \geqslant 0$,

(ii) Séparation : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,

(iii) Homogénéité : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

(iv) Inégalité triangulaire : pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Illustration : La figure ci-dessous représente l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne.

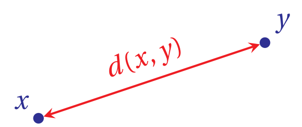


I.B - La distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$

Définition (Distance euclidienne) : La distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ est l'application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) = \|x - y\|.$$

Illustration : Si l'on considère les éléments de $\mathbb{R}^n$ comme des points, la distance euclidienne permet de mesurer la longueur entre deux points comme le montre la figure ci-dessous.



Proposition 2 : La distance euclidienne vérifie les propriétés suivantes.

(i) Positivité : pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a $d(x, y) \geqslant 0$.

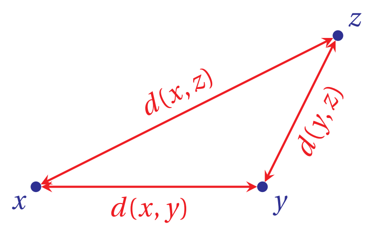
(ii) Séparation : pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

(iii) Symétrie : pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a $d(x, y) = d(y, x)$.

(iv) Inégalité triangulaire : pour tout $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^n)^3$, on a

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

Illustration : La figure ci-dessous représente l'inégalité triangulaire pour la distance euclidienne.



I.C - Topologie de $\mathbb{R}^n$

Définition (Boule ouverte / fermée) : Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.

(i) La boule ouverte de centre a et de rayon r est

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) < r\}.$$

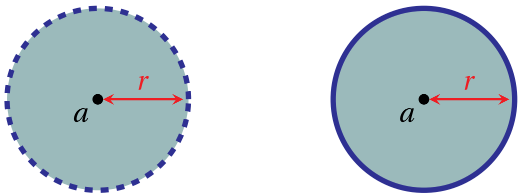
(ii) La boule fermée de centre a et de rayon r est

$$B_f(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) \leqslant r\}.$$

Exemples 1 :

a) Dans $\mathbb{R}$, on a $B(a,r) =]a-r, a+r[$ et $B_f(a,r) = [a-r, a+r]$.

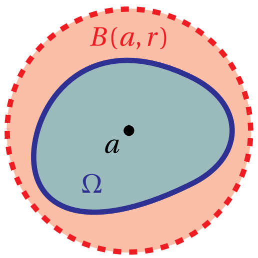
b) Dans $\mathbb{R}^2$, les boules sont des disques.



$B(a,r)$ $\qquad$ $B_f(a,r)$

Définition (Partie bornée) : On dit qu'une partie Ω de $\mathbb{R}^n$ est bornée s'il existe un point $a \in \mathbb{R}^n$ et un réel $r > 0$ tels que $\Omega \subset B(a,r)$.

Illustration : Autrement dit, une partie Ω est bornée si elle est contenue dans une boule ouverte.



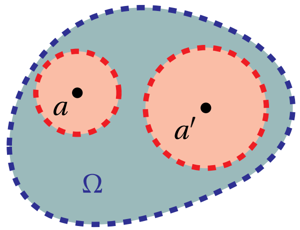
Définition (Partie ouverte / fermée) : Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^n$.

(i) On dit que Ω est une partie ouverte si

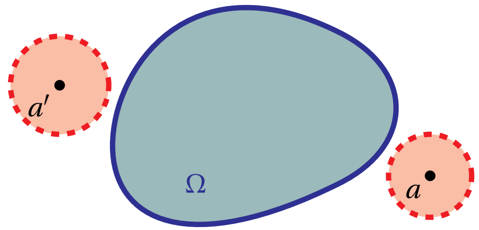
$$\forall a \in \Omega, \quad \exists r > 0, \quad B(a,r) \subset \Omega.$$

(ii) On dit que Ω est une partie fermée si son complémentaire est ouvert.

Illustration : Voici des exemples avec des parties Ω de $\mathbb{R}^2$.



Exemple d'une partie ouverte



Exemple d'une partie fermée

Remarques 1 :

a) Intuitivement, une partie de $\mathbb{R}^n$ est ouverte si elle ne contient aucune partie de son bord.

b) Intuitivement, une partie de $\mathbb{R}^n$ est fermée si elle contient tout son bord.

Exemples 2 :

a) L'intervalle $]a,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et l'intervalle $[a,b]$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

b) Si $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, alors la boule ouverte $B(a,r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et la boule fermée $B_f(a,r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

c) L'ensemble $]0,1[\times]0,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble $[0,1]\times[0,1]$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

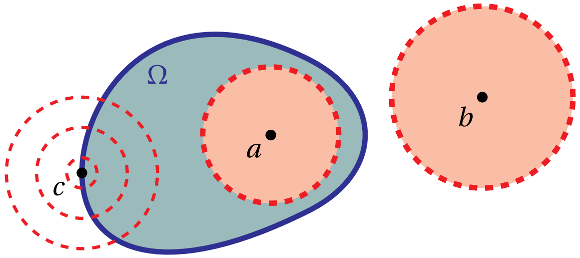
ATTENTION : Un ensemble n'est pas nécessairement ouvert ou fermé. Par exemple la partie $[0,1[$ de $\mathbb{R}$ n'est pas ouverte et n'est pas fermée.

Définition (Point intérieur / extérieur) : Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et Ω une partie de $\mathbb{R}^n$.

(i) On dit que le point a est intérieur à Ω s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$.

(ii) On dit que le point a est extérieur à Ω s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap \Omega = \varnothing$.

Illustration : Sur le schéma ci-dessous le points a est intérieur à Ω, le point b est extérieur à Ω et le point c n'est ni un point intérieur ni un point extérieur à Ω.



Remarques 2 :

a) Intuitivement, l'ensemble des points intérieurs d'une partie Ω de $\mathbb{R}^n$ est Ω privé de son bord.

b) Intuitivement, l'ensemble des points extérieurs d'une partie Ω sont les points qui ne sont ni dans Ω ni dans son bord.

c) L'ensemble des points intérieurs d'une partie de $\mathbb{R}^n$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

Exemples 3 :

a) L'ensemble des points intérieurs de $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$ est $]a, b[$.

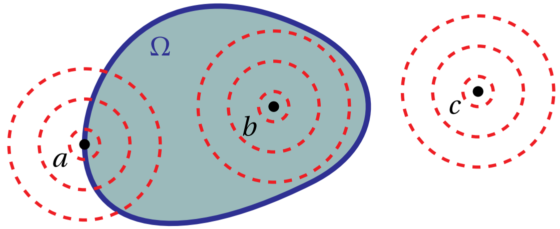
b) L'ensemble des points intérieurs de $B(a, r)$ ou $B_f(a, r)$ est $B(a, r)$.

c) L'ensemble des points intérieurs de $[0, 1] \times [0, 1]$ est $]0, 1[\times]0, 1[$.

d) L'ensemble des points extérieurs de $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$ est la réunion des intervalles $]-\infty, a[$ et $]b, +\infty[$.

Définition (Point adhérent) : Un point $a \in \mathbb{R}^n$ est adhérent à une partie Ω de $\mathbb{R}^n$ si pour tout réel $r > 0$, on a $B(a, r) \cap \Omega \neq \varnothing$.

Illustration : Sur le schéma ci-dessous les points a et b sont adhérents à Ω, mais pas le point c.



Remarque 3 : Intuitivement, les points adhérents à une partie Ω de $\mathbb{R}^n$ sont les points de la réunion entre Ω et son bord.

Exemples 4 :

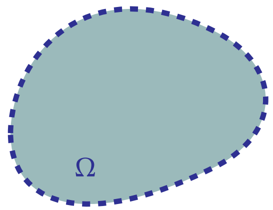
a) L'ensemble des points adhérents de $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$ est $[a, b]$.

b) L'ensemble des points adhérents de $B(a, r)$ ou $B_f(a, r)$ est $B_f(a, r)$.

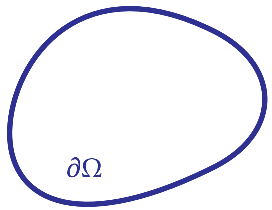
c) L'ensemble des points adhérents de $[0, 1[\times]0, 1]$ est $[0, 1] \times [0, 1]$.

Définition (Frontière) : La frontière (ou le bord) d'une partie Ω de $\mathbb{R}^n$, notée $\partial\Omega$, est l'ensemble des points adhérents à Ω qui ne sont pas intérieur à Ω.

Illustration : Au vu des remarques précédentes, la frontière correspond bien à l'intuition que l'on s'en fait sur des exemples simples.



Une partie Ω



La frontière de Ω

Exemples 5 :

a) La frontière de $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$ est $\{a, b\}$.

b) La frontière de $B(a, r)$ ou $B_f(a, r)$ est la sphère $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) = r\}$.

c) La frontière de $[0, 1[\times]0, 1]$ est le carré dont les sommets sont les points de coordonnées $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$.

II - Généralités sur les fonctions de plusieurs variables

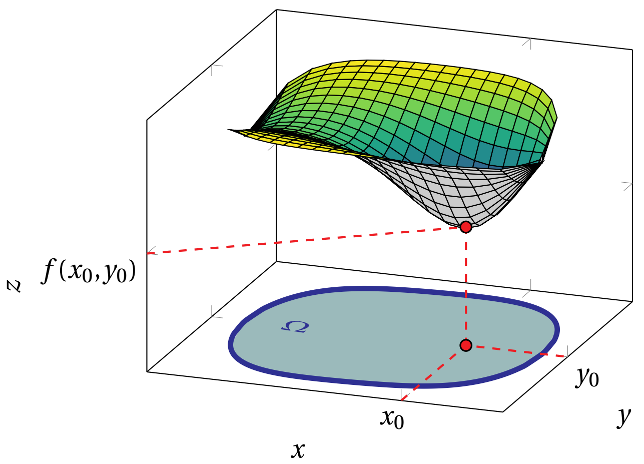
II.A - Représentation graphique d'une fonction de deux variables

Rappelons que si $h : I \to \mathbb{R}$ est une fonction où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, alors on peut lui associer sa courbe représentative $\mathscr{C}_h$. De même, on peut représenter une fonction de deux variables par une surface.

Définition (Surface représentative) : Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une application où Ω est une partie non vide de $\mathbb{R}^2$, alors la surface représentative de l'application f est l'ensemble

$$\mathscr{S}_f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega\}.$$

Illustration : On peut tracer la surface représentative d'une fonction de deux variables.



II.B - Limite et continuité

On fixe une application $f : \Omega \to \mathbb{R}$ où Ω est une partie non-vide de $\mathbb{R}^n$.

Définition (Limite en un point) : Soient a un point adhérent à Ω et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad d(x, a) < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Remarque 4 : Dans le cas où $n = 1$, on a $d(x, a) = |x - a|$, donc on retrouve la définition de la limite pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition (Continuité en un point) : Soit $a \in \Omega$. On dit que la fonction f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition (Continuité sur une partie) : On dit que f est continue sur Ω si elle est continue en tout point de Ω.

Notation : On note $\mathscr{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}$.

ATTENTION : Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continue par rapport à chacune de ses variables n'est pas nécessairement continue. Par exemple, l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0, 0)$ car pour tout réel $t \neq 0$, on a

$$f(t, t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0).$$

Cependant, l'application $x \mapsto f(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et l'application $y \mapsto f(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 6 : Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, la fonctions $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3 : Soient $(f,g) \in \mathscr{C}^0(\Omega, \mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

(i) Les fonction $f+g$, λf et fg sont continues sur Ω,

(ii) Si g ne s'annule pas sur Ω, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur Ω.

Exemples 7 :

a) Les applications polynomiales $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$. Par exemple, l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ci-dessous est continue sur $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = 3x^3y + x^2y^3 + 2x + 3y + 6.$$

b) Les applications rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition. Par exemple, l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ ci-dessous est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2 + 3xy + 1}{x^2 + y^2}.$$

Théorème 1 : Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et si Ω est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$, alors la fonction f est bornée sur Ω et elle atteint ses bornes.

III - Calcul différentiel

Dans cette partie, on considère une application $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un **ouvert** non-vide de $\mathbb{R}^n$.

III.A - Dérivées partielles

On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition (Dérivées partielles d'ordre 1) : Soient $a \in U$ et $i \in [\![1, n]\!]$. On appelle dérivée partielle d'ordre 1 de f au point a par rapport à la i-ième variable, sous réserve d'existence, le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_i f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}.$$

Remarques 5 :

a) Dans le cas où $n = 2$ ou $n = 3$, on note souvent les dérivées partielles

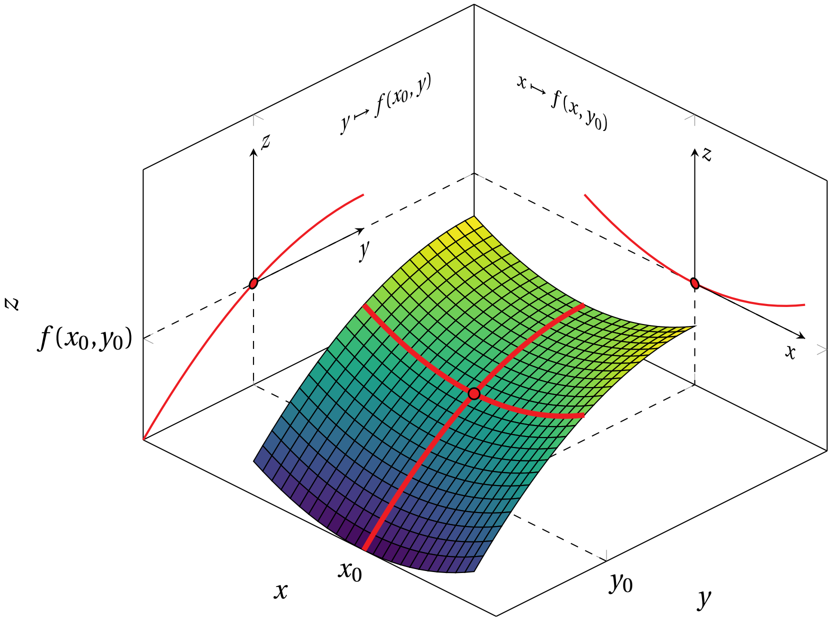
$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}.$$

b) La dérivée partielle d'ordre 1 de f au point a par rapport à la i-ième variable est par définition la dérivée en a_i de la fonction d'une variable

$$x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

En conséquence, pour justifier l'existence et calculer les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables, on peut utiliser les règles usuelles pour une fonction d'une variable.

Illustration : On considère la surface représentative d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en un point $(x_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles de l'application f au point (x_0, y_0) sont les dérivées des fonctions réelles d'une variable $x \mapsto f(x, y_0)$ en x_0 et $y \mapsto f(x_0, y)$ en y_0 tracées ci-dessous.



Exemple 8 : On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = 3x^2 y + 2x + \sin(y)$. Quand $y \in \mathbb{R}$ est fixé, la fonction $x \to f(x, y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la dérivée partielle de f par rapport à la première variable existe et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy + 2.$$

De même, lorsque $x \in \mathbb{R}$ est fixé, la fonction $y \to f(x, y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la dérivée partielle de f par rapport à la seconde variable existe et on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 + \cos(y).$$

Définition (Gradient) : Soit $a \in U$. Si les dérivées partielles d'ordre 1 existent au point a, on définit le gradient de f en a par

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 9 : L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$ admet des dérivées partielles et on a $\nabla f(x, y) = (y, x)$.

Définition (Point critique) : Soit $a \in U$. On dit que a est un point critique de f si les dérivées partielles d'ordre 1 existent et si

$$\left(\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \right) \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f(a) = 0.$$

Exemple 10 : L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$ admet $(0, 0)$ pour unique point critique.

III.B - Applications de classe $\mathscr{C}^1$

Définition (Application de classe $\mathscr{C}^1$) : On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent en tout point de U et sont continues sur U.

Notation : On note $\mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

Proposition 4 : Soient $(f, g) \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

(i) Les fonction $f + g$, λf et fg sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U,

(ii) Si g ne s'annule pas sur U, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

Exemple 11 : Les applications rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leur ensemble de définition.

Proposition (Développement limité à l'ordre 1) : Soit $a \in U$. Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, alors pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + h \in U$, on a

$$f(a+h) = f(a) + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i \right) + o(\|h\|).$$

Corollaire 1 : Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, alors f est continue sur U.

III.C - Dérivées partielles d'une fonction composée

Dans cette partie, on considère une application $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un **ouvert** non-vide de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 2 : Soit $(x, y) : I \to U \subset \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors la fonction

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(t) = f(x(t), y(t))$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$, on a

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t).$$

Remarque 6 : Par abus de notation, on écrit parfois cette relation sous la forme réduite

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Exemple 12 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $F(t) = f(t^2, t^3)$. En appliquant le théorème précédent, on obtient que F est de classe $\mathscr{C}^1$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F'(t) = 2t \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 3t^2 \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3).$$

Théorème 3 : Soient $(x, y) : O \to U \subset \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert non-vide O de $\mathbb{R}^2$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors la fonction

$$F : O \to \mathbb{R}, \quad F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur O et pour tout $(u, v) \in O$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \\
\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(u, v).
\end{aligned}$$

Remarque 7 : Par abus de notation, on écrit parfois ces relations sous la forme réduite

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Exemple 13 (Transformation linéaire) : Si on écrit $x = au + bv$ et $y = cu + dv$ avec un quadruplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, alors on a les dérivées partielles

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = c, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = b, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = d.$$

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, alors l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad F(u, v) = f(au + bv, cu + dv)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) &= a \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + c \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \\
\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) &= b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + d \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).
\end{aligned}$$

Exemple 14 (Les coordonnées polaires) : Si on écrit $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, alors on a les dérivées partielles

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta), \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta), \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin(\theta), \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta).$$

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors l'application $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) &= \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \\ \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) &= -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \end{aligned}$$

III.D - Applications de classe $\mathscr{C}^2$

Définition (Dérivées partielles d'ordre 2) : Les dérivées partielles d'ordre 2 de l'application f sont, sous réserve d'existence, les dérivées partielles d'ordre 1 des applications $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$.

Notation : L'application $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ est la j-ième dérivée partielle de la i-ième dérivée partielle de f. On la note plus simplement $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Remarques 8 :

a) A priori, il y a n^2 dérivées partielles d'ordre 2.

b) Dans le cas où $n = 2$, il y a donc quatre dérivées partielles d'ordre 2 que l'on note souvent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Définition (Application de classe $\mathscr{C}^2$) : On dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U si ses dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur U.

Notation : On note $\mathscr{C}^2(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

Proposition 5 : Soient $(f,g) \in \mathscr{C}^2(U,\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

(i) Les fonction $f+g$, λf et fg sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur U,

(ii) Si g ne s'annule pas sur U, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

Exemple 15 : Les applications rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur leur ensemble de définition.

Théorème de Schwarz : Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathscr{C}^2$, alors

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

IV - Extremums d'une fonction de plusieurs variables

On considère une application $f : \Omega \to \mathbb{R}$ où Ω est une partie non-vide de $\mathbb{R}^2$.

Définition (Maximum / minimum / extremum global) : Soit $a \in \Omega$.

(i) On dit que la fonction f admet un maximum global en a et que $f(a)$ est le maximum global de f si $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in \Omega$.

(ii) On dit que la fonction f admet un minimum global en a et que $f(a)$ est le minimum global de f si $f(x) \geqslant f(a)$ pour tout $x \in \Omega$.

(iii) On dit que la fonction f admet un extremum global en a et que $f(a)$ est un extremum global si f admet un maximum global ou un minimum global en a.

Définition (Maximum / minimum / extremum local) : Soit $a \in \Omega$.

(i) On dit que la fonction f admet un maximum local en a et que $f(a)$ est un maximum local de f s'il existe un réel $r > 0$ tel que

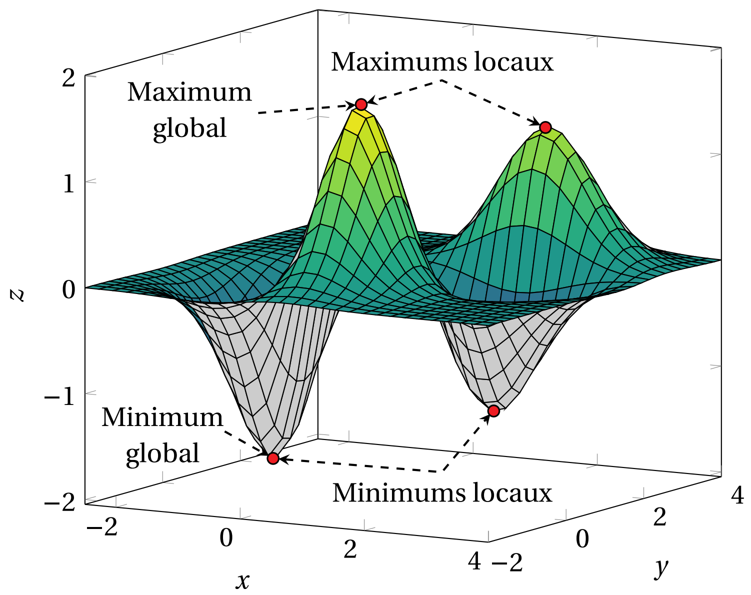
$$\forall x \in B(a,r) \cap \Omega, \quad f(x) \leqslant f(a).$$

(ii) On dit que la fonction f admet un minimum local en a et que $f(a)$ est un minimum local de f s'il existe un réel $r > 0$ tel que

$$\forall x \in B(a,r) \cap \Omega, \quad f(x) \geqslant f(a).$$

(iii) On dit que f admet un extremum local en a et que $f(a)$ est un extremum local de f si f admet un maximum local ou un minimum local en a.

Exemple 16 : On peut repérer les extremums d'une fonction sur sa surface représentative comme ci-dessous.



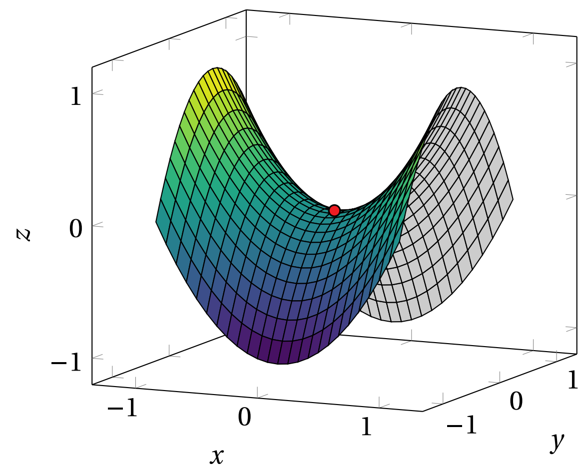
Remarques 9 :

a) Un maximum (respectivement minimum, extremum) global est aussi un maximum (respectivement minimum, extremum) local.

b) La réciproque de cette propriété est fausse comme on peut l'observer sur la surface précédente.

Proposition 6 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^n$. Si f admet un extremum local en un point $a \in U$, alors a est un point critique de f.

ATTENTION : La réciproque de la proposition précédente est fausse. Par exemple, si on considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 - y^2$, alors $(0,0)$ est un point critique de f, mais f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$. On peut le remarquer sur la surface représentative de f.



V - Méthodes

V.A - Résoudre une équation aux dérivées partielles

Il n'y a pas de méthode générale de résolution pour les équations aux dérivées partielles. On utilise souvent des changements de variable qui sont donnés dans les énoncés. Nous allons traiter plusieurs exemples.

Exemple 17 (Transformation affine) : On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classes $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f. \qquad (E)$$

On utilise le changement de variable

$$(u, v) = (x+y, x-y) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

D'après les théorèmes de compositions, la fonction

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(u, v) = f\Bigg(\underbrace{\frac{u+v}{2}}_{x}, \underbrace{\frac{u-v}{2}}_{y}\Bigg)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right).$$

On en déduit que

$$f \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{2}F.$$

C'est une équation différentielle d'ordre 1 en u que l'on sait résoudre. On en déduit qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad F(u, v) = h(v)\exp\left(\frac{u}{2}\right).$$

Finalement, on obtient que les solutions de (E) sont les fonctions

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = h(x-y)\exp\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Exemple 18 (Passage en coordonnées polaires) : On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classes $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \qquad (E)$$

On passe en coordonnées polaires $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. La fonction

$$F : \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad F(r, \theta) = f(\underbrace{r\cos(\theta)}_{x}, \underbrace{r\sin(\theta)}_{y})$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ d'après les théorèmes de compositions, et on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\cdot\frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\cdot\frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta)\\ &= \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\\ &= \frac{1}{r}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$f \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad r\frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial r} = 0.$$

On en déduit qu'il existe une fonction $g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad F(r, \theta) = g(\theta).$$

Comme $\theta = \mathrm{Arctan}(y/x)$, on conclut que les solutions de (E) sont

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) = g\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

où $g :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Exemple 19 (Une équation aux dérivées partielles d'ordre 2) : On cherche les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classes $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0. \qquad (E)$$

On utilise le changement de variable

$$(u,v)=(x,x+y) \quad \Leftrightarrow \quad (x,y)=(u,v-u).$$

D'après les théorèmes de compositions, la fonction

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \quad F(u,v)=f(\underbrace{u}_{x},\underbrace{v-u}_{y})$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ et on a

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

En recommençant, on en déduit

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u,v)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$f \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}=0.$$

On en déduit qu'il existe deux fonctions $h,k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que

$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2, \quad F(u,v)=h(v)u+k(v).$$

Finalement, on obtient

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad f(x,y)=h(x+y)x+k(x+y).$$

où $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.

V.B - Résoudre un système d'équations aux dérivées partielles

On fixe deux intervalles ouverts non-vide I et J de l'ensemble $\mathbb{R}$, ainsi que deux fonctions $g:I\times J\to\mathbb{R}$ et $h:I\times J\to\mathbb{R}$ continues. On cherche à déterminer les fonctions $f:I\times J\to\mathbb{R}$ de classes $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x}=g \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=h.$$

Méthode : Résoudre un système d'équations aux dérivées partielles

1) On résout la première équation en prenant une primitive par rapport à x.
2) On remplace l'expression obtenue dans la seconde équation.
3) On en déduit l'ensemble des solutions.

Remarque 10 : Si les fonctions g et h sont de classes $\mathscr{C}^1$ et si le système admet une solution, on a nécessairement d'après le théorème de Schwartz

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial x}.$$

Si cette relation n'est pas vérifiée, le système n'a pas de solution. Ainsi, dans le cas où g et h sont de classes $\mathscr{C}^1$, on commencera par vérifier que l'on a cette relation avant d'employer la méthode ci-dessus.

Exemple 20 : On cherche les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=x^2y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=xy^2.$$

Les fonctions $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définies par $g(x,y)=x^2y$ et $h(x,y)=xy^2$ sont de classes $\mathscr{C}^1$ et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=x^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y}\neq\frac{\partial h}{\partial x}.$$

On conclut que le système n'a pas de solution.

Exemple 21 : On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 y.$$

Les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $g(x,y) = xy^2$ et $h(x,y) = x^2 y$ sont de classes $\mathscr{C}^1$ et on a la relation

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2xy = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y).$$

D'après la première équation, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + K(y)$$

où $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. En substituant dans la seconde équation, on obtient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 y + K'(y) = x^2 y,$$

donc $K' = 0$. Ainsi, la fonction K est constante. Finalement, les solutions du système sont les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + K \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}.$$

V.C - Déterminer les extremums globaux d'une fonction

On considère une application $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ où Ω est une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ fermée et bornée.

Méthode : Déterminer les extremums globaux d'une fonction de deux variables

1) On vérifie que Ω est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ et que f est une application continue, ce qui justifie que f admet un maximum et un minimum sur Ω par le théorème 1.
2) On désigne par U l'ensemble des points intérieurs de Ω. On justifie que l'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U. On détermine les points critiques de l'application $f : U \to \mathbb{R}$, puis on calcul l'image par f de chacun de ces points (car les éventuels extremums locaux de f sur l'ouvert U sont aux points critiques).
3) On détermine les extremums de l'application $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ en se ramenant à l'étude de fonctions à une variable.
4) On conclut en comparant les différentes valeurs de f trouvées.

Exemple 22 : On souhaite déterminer le maximum de $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

1) La fonction f est continue sur la partie $\Omega = [0,1]^2$ qui est fermée et bornée, donc elle admet un maximum sur $[0,1]^2$.
2) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $U =]0,1[^2$. Les points critiques de f sur U sont les solutions de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{1-2xy-x^2}{(1+x^2)^2(1+y^2)} & = & 0 \\ \dfrac{1-2xy-y^2}{(1+x^2)(1+y^2)^2} & = & 0. \end{array} \right.$$

Seul le couple $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ est solution, donc c'est le seul point critique de l'application f sur l'ouvert U. La valeur de f en ce point est

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

3) Les points de $\partial\Omega$ s'écrivent sous la forme

$$(0,t),\ (t,0),\ (1,t)\ \text{ou}\ (t,1) \quad \text{avec} \quad t \in [0,1].$$

Les valeurs prises par l'application f sur $\partial\Omega$ sont donc les valeurs prises sur $[0,1]$ par les fonctions $h_1, h_2, h_3, h_4 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$h_1(t) = f(0,t),\ \ h_2(t) = f(t,0),\ \ h_3(t) = f(1,t) \quad \text{et} \quad h_4(t) = f(t,1).$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$h_1(t) = h_2(t) = \frac{t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad h_3(t) = h_4(t) = \frac{1+t}{2(1+t^2)}.$$

En effectuant des études classiques de fonctions d'une variable, on obtient les tableaux de variations suivants.

t	0		1
h_1	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

t	0		$\sqrt{2}-1$		1
h_3	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}+1}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

On en déduit que le maximum de f sur $\partial\Omega$ est

$$\max_{\partial\Omega}(f) = \max\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$$

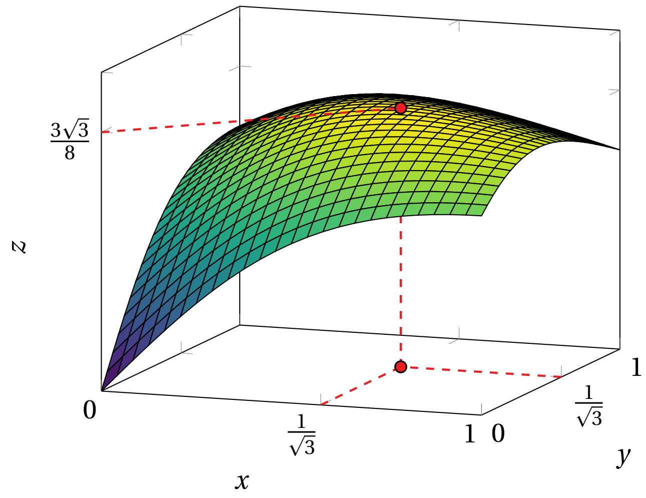
et qu'il est atteint aux points $(\sqrt{2}-1, 1)$ et $(1, \sqrt{2}-1)$.

4) On conclut que le maximum de f sur $\Omega = [0,1]^2$ est

$$\max_{\Omega}(f) = \max\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{2}+1}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

et qu'il est atteint au point $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

On peut tracer la surface représentative de la fonction f.



Il n'est pas évident d'observer sur le graphique ci-dessus que la valeur que nous avons trouvée est bien le maximum de la fonction f. Il est plus facile de le constater en utilisant les deux angles de vue suivants.