

CHAPITRE 9

Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1 :

1. Montrons que φ est un produit scalaire sur E .

- Linéarité à gauche : si $(f, g, h) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(f + \lambda g, h) &= (f + \lambda g)(0)h(0) + \int_0^1 (f + \lambda g)'(t)h'(t) dt \\ &= f(0)h(0) + \lambda g(0)h(0) + \int_0^1 f'(t)h'(t) + \lambda g'(t)h'(t) dt \\ &= \left(f(0)h(0) + \int_0^1 f'(t)h'(t) dt \right) \\ &\quad + \lambda \left(g(0)h(0) + \int_0^1 g'(t)h'(t) dt \right) \\ &= \varphi(f, h) + \lambda \varphi(g, h). \end{aligned}$$

- Symétrie : si $(f, g) \in E^2$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(g, f) &= g(0)f(0) + \int_0^1 g'(t)f'(t) dt \\ &= f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt = \varphi(f, g). \end{aligned}$$

- Linéarité à droite : l'application φ est linéaire à gauche et symétrique, donc elle est linéaire à droite.
- Positivité : si $f \in E$, on a

$$\varphi(f, f) = f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geq 0.$$

- Définie : si $f \in E$ telle que $\varphi(f, f) = 0$, alors comme chaque terme de la somme est positif, on obtient

$$f(0)^2 = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f'(t)^2 dt = 0.$$

La fonction $(f')^2$ est positive, continue et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, donc elle est nulle. Ainsi $f' = 0$, donc f est constante sur $[0, 1]$. Comme $f(0) = 0$, on trouve $f = 0$.

2. On a

$$\begin{aligned} (\cos | \sin) &= \cos(0)\sin(0) - \int_0^1 \sin(t)\cos(t) dt = \left[-\frac{1}{2}\sin^2(t) \right]_0^1 = -\frac{1}{2}\sin^2(1), \\ (\text{Id} | \exp) &= \text{Id}(0)\exp(0) + \int_0^1 \exp(t) dt = [\exp(t)]_0^1 = e - 1. \end{aligned}$$

3. En linéarisant pour les deux premières intégrales, on trouve

$$\begin{aligned} \|\cos\|^2 &= (\cos | \cos) = \cos^2(0) + \int_0^1 \sin^2(t) dt = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\sin(2), \\ \|\sin\|^2 &= (\sin | \sin) = \sin^2(0) + \int_0^1 \cos^2(t) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(2), \end{aligned}$$

donc $\|\cos\| = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\sin(2)}$ et $\|\sin\| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(2)}$. De plus, on a

$$\|\exp\|^2 = (\exp | \exp) = \exp^2(0) + \int_0^1 \exp^2(t) dt = \frac{e^2 + 1}{2},$$

donc $\|\exp\| = \sqrt{\frac{e^2 + 1}{2}}$.

4. Pour $(f, g) \in E^2$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est

$$\begin{aligned} \left| f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt \right| \\ \leq \left(f^2(0) + \int_0^1 f'(t)^2 dt \right)^{1/2} \left(g^2(0) + \int_0^1 g'(t)^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Exercice 2 :

- Montrons que φ est un produit scalaire sur E .
 - La linéarité à gauche, la symétrie et la linéarité à droite sont faciles à montrer.
 - Positivité : Si $P \in E$, on a

$$\varphi(P, P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geq 0.$$

- Définie : Si $P \in E$ telle que $\varphi(P, P) = 0$, alors le polynôme P admet 0, 1 et 2 comme racine. Comme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on en déduit que $P = 0$ (sinon P aurait au plus deux racines).
- En prenant $P(X) = X^2 + 1$ et $Q(X) = X^2 + X + 1$, on a

$$(X^2 + 1 | X^2 + X + 1) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 42.$$

En prenant $P(X) = X^2 - 3X$ et $Q(X) = 2X - 1$, on a

$$(X^2 - 3X | 2X - 1) = 0 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot 3 = -8.$$

- De même, on a

$$\|X^2 + 1\| = \sqrt{(X^2 + 1 | X^2 + 1)} = \sqrt{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5} = \sqrt{30},$$

$$\|X^2 + X + 1\| = \sqrt{1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 7 \cdot 7} = \sqrt{59},$$

$$\|2X^2 - 5X\| = \sqrt{0 \cdot 0 + (-3) \cdot (-3) + (-2) \cdot (-2)} = \sqrt{13}.$$

Exercice 3 :

- Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^3 , on a

$$(x + 2y + 3z)^2 = |(1, 2, 3) | (x, y, z)|^2 \leq (1^2 + 2^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2) \leq 14.$$

- Dans le cas d'égalité, toutes les inégalités ci-dessus sont des égalités. D'une part, on a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. D'autre part, on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc les vecteurs (x, y, z) et $(1, 2, 3)$ sont colinéaires d'après le cours. On en déduit que les cas d'égalités sont pour les vecteurs

$$(x, y, z) = \pm \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3).$$

Exercice 4 :

- Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^3 , on a

$$\begin{aligned} (x + y + z)^2 &= \left| \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) | (\sqrt{2}x, y, \sqrt{5}z) \right) \right|^2 \\ &\leq \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 \right) (2x^2 + y^2 + 5z^2) \\ &\leq \frac{17}{10}. \end{aligned}$$

- Dans le cas d'égalité, toutes les inégalités ci-dessus sont des égalités. D'une part, on a $2x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$. D'autre part, on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc les vecteurs $(\sqrt{2}x, y, \sqrt{5}z)$ et $(2^{-1/2}, 1, 5^{-1/2})$ sont colinéaires d'après le cours. On en déduit que les cas d'égalités sont pour les vecteurs

$$(x, y, z) = \pm \sqrt{\frac{10}{17}} \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{5} \right).$$

Exercice 5 :

- Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n , on a

$$\begin{aligned} (x_1 + \dots + x_n)^2 &= |((1, \dots, 1) | (x_1, \dots, x_n))|^2 \\ &\leq (1^2 + \dots + 1^2)(x_1^2 + \dots + x_n^2) \\ &\leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2). \end{aligned}$$

- Dans le cas d'égalité, on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc les vecteurs $(1, \dots, 1)$ et (x_1, \dots, x_n) sont colinéaires d'après le cours. On en déduit que les cas d'égalités sont pour les vecteurs

$$(x_1, \dots, x_n) = (\lambda, \dots, \lambda) \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6 : On a vu en cours que l'application définie par

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})^2, \quad (f | g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

est un produit scalaire. Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$I_{m+n} = \int_0^1 (t^m \sqrt{f(t)}) (t^n \sqrt{f(t)}) dt \\ \leq \left(\int_0^1 t^{2m} f(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 t^{2n} f(t) dt \right)^{1/2},$$

ce qui donne le résultat en élevant au carré.

Exercice 7 : En effectuant la différence entre le second membre et le premier membres de l'inégalité, puis en utilisant l'identité du parallélogramme, on obtient

$$2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2) - 2 - \|x + y\|^2 \\ = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 + \|x\|^2\|y\|^2 \\ = \|x - y\|^2 + \|x\|^2\|y\|^2 \geq 0.$$

Exercice 8 : En élevant l'inégalité au carré, en prenant la différence, puis en utilisant la bilinéarité, on a

$$0 \leq \|u + tv\|^2 - \|u\|^2 = 2t(u | v) + t^2\|v\|^2.$$

Le membre de droite est une fonction polynomiale du second degré positive en t , ce qui implique nécessairement que $(u | v) = 0$, donc u et v sont orthogonaux.

Exercice 9 :

- Une base de F est $(u_1, u_2) = ((1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 0))$. Par bilinéarité, on a

$$v = (x, y, z, t) \in F^\perp \Leftrightarrow (v | u_1) = 0 \text{ et } (v | u_2) = 0 \\ \Leftrightarrow x + z - t = 0 \text{ et } y + z = 0.$$

On en déduit que $F^\perp = \text{Vect}((1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 1))$.

- Une base de G est $(u_1, u_2) = ((1, -2, 1, 0), (1, 0, 0, -1))$. Par bilinéarité, on a

$$v = (x, y, z, t) \in G^\perp \Leftrightarrow (v | u_1) = 0 \text{ et } (v | u_2) = 0 \\ \Leftrightarrow x - 2y + z = 0 \text{ et } x - t = 0.$$

On en déduit que $G^\perp = \text{Vect}((1, 0, -1, 1), (0, 1, 2, 0))$.

Exercice 10 :

1. On vérifie les points de la définition.

- On a $F \subset \mathbb{R}_2[X]$ par définition de F .
- Le polynôme nul est dans F car il s'annule en 0.
- Soient $P, Q \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$(P + \lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0) = 0 + \lambda \times 0 = 0,$$

donc $P + \lambda Q \in F$.

On a donc montré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. De même, on vérifie la définition pour G .

- On a $G \subset \mathbb{R}_2[X]$ par définition de G .
- Le vecteur $0_{\mathbb{R}_2[X]} \in G$ car $\int_0^1 0 dt = 0$.
- Soient $P, Q \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_0^1 (P + \lambda Q)(t) dt = \int_0^1 P(t) dt + \lambda \int_0^1 Q(t) dt = 0 + \lambda \times 0 = 0,$$

donc $P + \lambda Q \in G$.

On a donc montré que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. En notant $P = aX^2 + bX + c$, on a

$$P \in F \Leftrightarrow P(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0.$$

On en déduit que $F = \text{Vect}(X, X^2)$. De même,

$$P \in G \Leftrightarrow \int_0^1 P(t) dt = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0.$$

On en déduit que $G = \text{Vect}(2X - 1, 3X^2 - 1)$.

3. Par bilinéarité, on a

$$P = aX^2 + bX + c \in F^\perp \Leftrightarrow (P | X) = 0 \text{ et } (P | X^2) = 0 \\ \Leftrightarrow 9a + 5b + 3c = 0 \text{ et } 17a + 9b + 5c = 0.$$

On en déduit que $F^\perp = \text{Vect}(X^2 - 3X + 2)$. De même, on a

$$P = aX^2 + bX + c \in G^\perp \Leftrightarrow (P | 2X - 1) = 0 \text{ et } (P | 3X^2 - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow 13a + 7b + 3c = 0 \text{ et } 46a + 24b + 12c = 0.$$

On en déduit que $G^\perp = \text{Vect}(6X^2 - 9X - 5)$.

4. Si l'on note $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$, on a

$$(P_0 | P_1) = (P_0 | P_2) = (P_1 | P_2) = 0,$$

donc \mathcal{B} est une famille orthogonale. Comme elle est composée de polynôme non nul, la famille \mathcal{B} est aussi libre d'après le cours, donc c'est une base orthogonale de E . Pour obtenir une base orthonormée, il suffit de normaliser les vecteurs de la base précédente. Une base orthonormée de E est donc

$$\left(\frac{1}{2}X(X-1), X(X-2), \frac{1}{2}(X-1)(X-2) \right).$$

Exercice 11 :

- Montrons que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - Linéarité à gauche : si $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors en utilisant la linéarité de la transposition et de la trace, on a

$$\varphi(A + \lambda B, C) = \text{Tr}((A + \lambda B)^T C) = \text{Tr}((A^T + \lambda B^T)C) \\ = \text{Tr}(A^T C) + \lambda \text{Tr}(B^T C) = \varphi(A, C) + \lambda \varphi(B, C).$$

- Symétrie : soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Comme la trace d'une matrice carrée est égale à la trace de sa transposée (car la diagonale est la même), on obtient avec les propriétés de la transposition que

$$\varphi(A, B) = \text{Tr}(A^T B) = \text{Tr}((A^T B)^T) = \text{Tr}(B^T A) = \varphi(B, A).$$

- Linéarité à droite : l'application φ est linéaire à gauche et symétrique, donc elle est linéaire à droite.

- Positivité : si on note $(a_{i,j})$ les coefficients de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on remarque par un calcul direct que

$$\varphi(A, A) = \text{Tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \geq 0.$$

- Définie : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(A, A) = 0$, alors en reprenant l'expression ci-dessus, comme chaque terme de la somme est positif, on obtient

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{i,j}^2 = 0,$$

donc la matrice A est nulle.

2. Il suffit d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\text{Tr}(A)^2 = |(\mathbf{I}_n | A)|^2 \leq \|\mathbf{I}_n\|^2 \|A\|^2 = n \text{Tr}(A^T A).$$

De plus, on a égalité si et seulement si les matrices \mathbf{I}_n et A sont colinéaires, donc si et seulement si A est une matrice scalaire.

- L'ensemble F est le noyau de la forme linéaire non nulle $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$.
- D'après le cours, on a $\dim(F^\perp) = 1$. De plus, on remarque que $\mathbf{I}_n \in F^\perp$, donc F^\perp est l'ensemble des matrices scalaires.

Exercice 12 :

- On raisonne par double inclusion.
 - Si $u \in (F + G)^\perp$, alors il est orthogonal à tous les éléments de $F + G$. En particulier, il est orthogonal à tous les éléments de F et tous les éléments de G , donc $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
 - Soit $u \in F^\perp \cap G^\perp$. Si $x \in F + G$, alors il existe $(f, g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$ et on a

$$(u | x) = (u | f) + (u | g) = 0.$$

Donc $u \in (F + G)^\perp$ et $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$.

2. Soit $u \in F^\perp + G^\perp$. Alors il existe $(v, w) \in F^\perp \times G^\perp$ tel que $u = v + w$. Pour tout élément $x \in F \cap G$, on a donc

$$(u | x) = (v | x) + (w | x) = 0.$$

Ainsi $u \in (F \cap G)^\perp$ et on a montré l'inclusion. Dans un espace euclidien, on peut comparer les dimensions. D'une part, avec le cours, on a

$$\dim((F \cap G)^\perp) = \dim(E) - \dim(F \cap G).$$

D'autre part, en utilisant le résultat de la première question

$$\begin{aligned} \dim(F^\perp + G^\perp) &= \dim(F^\perp) + \dim(G^\perp) - \dim(F^\perp \cap G^\perp) \\ &= \dim(E) - \dim(F) + \dim(E) - \dim(G) - \dim((F + G)^\perp) \\ &= 2 \dim(E) - \dim(F) - \dim(G) - (\dim(E) - \dim(F + G)) \\ &= \dim(E) - (\dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G)) \\ &= \dim(E) - \dim(F \cap G). \end{aligned}$$

Les deux sous-espaces vectoriels ont la même dimension, donc ils sont égaux.

3. Soit $f \in F$. Pour tout $g \in F^\perp$, on a $(f | g) = 0$, donc $f \in (F^\perp)^\perp$, d'où l'inclusion. Dans un espace euclidien, on peut comparer les dimensions,

$$\dim((F^\perp)^\perp) = \dim(E) - \dim(F^\perp) = \dim(F).$$

Les deux sous-espaces vectoriels ont la même dimension, donc ils sont égaux.

Exercice 13 :

- En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base de F donnée dans l'énoncé, on trouve qu'une base orthonormée de F est

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{15}}(-1, 3, 2, 1) \right).$$

- En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base de G donnée dans l'énoncé, on trouve qu'une base orthonormée de G est

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{66}}(5, 2, -1, -6) \right).$$

Exercice 14 :

- Vu en cours.
- En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $(1, X, X^2)$ de E , on trouve la base orthogonale

$$\left(1, X - \frac{1}{2}, X^2 - X + \frac{1}{6} \right).$$

En normalisant, on en déduit que

$$\left(1, \sqrt{3}(2X - 1), \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1) \right)$$

est une base orthonormée de E .

Exercice 15 :

- Comme $\dim(H^\perp) = 1 < 2 = \dim(H)$, il est plus rapide de calculer la projection orthogonale sur H^\perp . Comme H est le plan d'équation

$$x - 2y + z = 0 \Leftrightarrow ((1, -2, 1) | (x, y, z)) = 0,$$

on obtient qu'une base de H^\perp est $(1, -2, 1)$. On en déduit une base orthonormée de H^\perp en posant $e = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$. En notant $u = (x, y, z)$, on en déduit avec la formule du cours que

$$p_{H^\perp}(u) = (u | e)e = \frac{1}{6}(x - 2y + z, -2x + 4y - 2z, x - 2y + z).$$

Avec la relation $p_H + p_{H^\perp} = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$, on en déduit

$$p_H(u) = u - p_{H^\perp}(u) = \frac{1}{6}(5x + 2y - z, 2x + 2y + 2z, -x + 2y + 5z).$$

- D'après le cours, on a

$$\begin{aligned} d((a, b, c), H) &= \|(a, b, c) - p_H(a, b, c)\| = \|p_{H^\perp}(a, b, c)\| \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{(a - 2b + c)^2 + (-2a + 4b - 2c)^2 + (a - 2b + c)^2} \\ &= \frac{|a - 2b + c|}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Exercice 16 :

1. On remarque facilement qu'une base orthonormée de F est donnée par

$$(u_1, u_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1) \right).$$

Ainsi, en notant $v = (x, y, z, t)$, on en déduit

$$p_F(v) = (v | u_1)u_1 + (v | u_2)u_2 = \frac{1}{2}(x - z, y - t, z - x, t - y).$$

2. D'après le cours, on a

$$\begin{aligned} d((a, b, c, d), F) &= \|(a, b, c, d) - p_F(a, b, c, d)\| = \frac{1}{2}\|(a + c, b + d, a + c, b + d)\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}. \end{aligned}$$

Exercice 17 :

1. En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $(1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$, on trouve que

$$\mathcal{B} = (E_0, E_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(X - 1) \right)$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

2. En utilisant la formule de la projection orthogonale avec la base orthonormée déterminée dans la question précédente, on obtient

$$p_{\mathbb{R}_1[X]}(P) = (P | E_0)E_0 + (P | E_1)E_1.$$

En notant $P = aX^2 + bX + c$, on trouve

$$p_{\mathbb{R}_1[X]}(P) = \frac{5a + 3b + 3c}{3} + \frac{4a + 2b}{2}(X - 1) = (2a + b)X + \frac{1}{3}(3c - a).$$

3. Finalement, d'après le cours, on a

$$\begin{aligned} d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) &= \|X^2 - p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)\| = \left\| X^2 - \left(2X - \frac{1}{3} \right) \right\| \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(-\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 18 :

1. D'après l'exercice 14, une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ est (E_0, E_1) avec

$$E_0 = 1 \quad \text{et} \quad E_1 = \sqrt{3}(2X - 1).$$

En utilisant la formule de la projection orthogonale, on obtient

$$p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = (X^2 | E_0)E_0 + (X^2 | E_1)E_1 = (X^2 | 1) + 3(X^2 | 2X - 1)(2X - 1).$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} (X^2 | 1) &= \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}, \\ (X^2 | 2X - 1) &= \int_0^1 2t^3 - t^2 dt = \left[\frac{t^4}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = \frac{1}{3} + \frac{3}{6}(2X - 1) = X - \frac{1}{6}.$$

2. Par définition, on a la relation

$$\begin{aligned} \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt &= \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|X^2 - aX - b\|^2 \\ &= \inf_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \|X^2 - P\|^2 = d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2. \end{aligned}$$

De plus, d'après le cours et la question précédente, on a

$$d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2 = \|X^2 - p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)\|^2 = \left\| X^2 - X + \frac{1}{6} \right\|^2.$$

Finalement, en calculant, on obtient que

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \left\| X^2 - X + \frac{1}{6} \right\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right)^2 dt = \frac{1}{180}.$$