CHAPITRE 9
Espaces préhilbertiens réels

I - Produit scalaire et norme

Exercice 1 : On note $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et on définit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer le produit scalaire $(\cos \mid \sin)$ et $(\mathrm{Id} \mid \exp)$.
3. Calculer les normes $\|\cos\|, \|\sin\|, \|\exp\|$.
4. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire.

Exercice 2 : On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on définit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $(X^2+1 \mid X^2+X+1)$ et $(X^2-3X \mid 2X-1)$.
3. Calculer $\|X^2+1\|$, $\|X^2+X+1\|$ et $\|2X^2-5X\|$.

Exercice 3 : Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

1. Montrer que $(x+2y+3z)^2 \leqslant 14$.
2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 4 : Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $2x^2+y^2+5z^2 \leqslant 1$.

1. Montrer que $(x+y+z)^2 \leqslant 17/10$.
2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 5 : Soit $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$
2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 6 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on a $I_{m+n}^2 \leqslant I_{2m} I_{2n}$.

Exercice 7 : Soit E un espace préhilbertien réel. Montrer que

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad 2 + \|x+y\|^2 \leqslant 2\left(1+\|x\|^2\right)\left(1+\|y\|^2\right).$$

II - Orthogonalité

Exercice 8 : Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $(u,v) \in E^2$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|u+tv\| \geqslant \|u\|.$$

Montrer que u et v sont orthogonaux.

Exercice 9 : On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique. Déterminer l'orthogonal des sous-espaces vectoriels F et G définies par

$$F = \mathrm{Vect}\big((1,0,1,-1),(0,1,1,0)\big), \quad G = \mathrm{Vect}\big((1,-2,1,0),(1,0,0,-1)\big).$$

Exercice 10 : On reprend les notations de l'exercice 2. On considère

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer une base de F et une base de G.
3. Déterminer l'orthogonal de F et l'orthogonal de G.
4. Montrer que $\mathscr{B} = \big(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2)\big)$ est une base orthogonale de E. En déduire une base orthonormée de E.

Exercice 11 : On définit $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \varphi(A,B) = \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}} B).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Tr}(A)^2 \leqslant n\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}} A)$. Préciser les cas d'égalité.
3. Montrer que $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser sa dimension.
4. Déterminer $F^{\perp}$.

Exercice 12 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E. Montrer que

1. $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$
2. $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$ avec égalité si E est euclidien.
3. $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$ avec égalité si E est euclidien.

Exercice 13 : Déterminer une base orthonormée des sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^4$ définies à l'exercice 9.

Exercice 14 : On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on considère le produit scalaire

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad (P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer une base orthonormée de E.

III - Projection orthogonale

Exercice 15 : On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique.

1. Déterminer la projection orthogonale sur H d'équation $x - 2y + z = 0$.
2. Calculer la distance de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ au plan H.

Exercice 16 : On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique.

1. Déterminer la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F d'équations
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ x-y+z-t & = & 0. \end{array}\right.$$
2. Calculer la distance de $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ au sous-espace vectoriel F.

Exercice 17 : On reprend les notations de l'exercice 2.

1. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.
2. Déterminer la projection orthogonal de $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}_1[X]$.
3. Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 18 : On reprend les notations de l'exercice 14.

1. Déterminer la projection orthogonal de $X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}_1[X]$.
2. En déduire la valeur de
$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2\,\mathrm{d}t.$$