CHAPITRE 13
Équations différentielles

Exercice 1 : On détermine les solutions de l'équation homogène, puis on utilise la méthode de la variation de constante pour déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle. Les solutions sont

(i) $y(t) = \dfrac{t^2}{2}\exp(-t) + A\exp(-t)$ avec $A \in \mathbb{R}$,

(ii) $y(t) = \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{3}{2}t + \dfrac{9}{4} + A\exp(-2t)$ avec $A \in \mathbb{R}$,

(iii) $y(t) = -\dfrac{3}{5}\cos(t) - \dfrac{1}{5}\sin(t) + A\exp(2t)$ avec $A \in \mathbb{R}$,

(iv) $y(x) = t\sqrt{1+t^2} + A\sqrt{1+t^2}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

(i) Les solutions de l'équation différentielle sur les intervalles de $\mathbb{R}^*$ sont

$$y(t) = At^2 + t^3 \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R}.$$

Si il existe une solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E), alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$y(t) = \begin{cases} at^2 + t^3 & \text{si } t < 0 \\ bt^2 + t^3 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

La fonction y est continue en 0, donc on doit avoir

$$y(0) = \lim_{t \to 0^-} y(t) = \lim_{t \to 0^+} y(t) = 0,$$

ce qui ne donne pas de condition sur (a,b). La fonction y est dérivable en 0, donc on doit avoir

$$y'(0) = \lim_{t \to 0^-} y'(t) = \lim_{t \to 0^+} y'(t) = 0,$$

ce qui ne donne pas de condition sur (a,b). Réciproquement, la fonction

$$y(t) = \begin{cases} at^2 + t^3 & \text{si } t \leqslant 0 \\ bt^2 + t^3 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

est dérivable d'après les calculs précédents et elle vérifie l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

(ii) Les solutions de l'équation différentielle sur les intervalles de $\mathbb{R}^*$ sont

$$y(t) = A\exp\left(-\frac{1}{t}\right) \quad A \in \mathbb{R}.$$

Si il existe une solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E), alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$y(t) = \begin{cases} a\exp(-1/t) & \text{si } t < 0 \\ b\exp(-1/t) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

La fonction y est continue en 0, donc on doit avoir

$$y(0) = \lim_{t \to 0^-} y(t) = \lim_{t \to 0^+} y(t) = 0,$$

ce qui impose $a = 0$. La fonction y est dérivable en 0, donc on doit avoir

$$y'(0) = \lim_{t \to 0^-} y'(t) = \lim_{t \to 0^+} y'(t) = 0,$$

ce qui ne donne pas de nouvelle condition sur (a,b). Réciproquement, la fonction

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ b\exp(-1/t) & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad b \in \mathbb{R}$$

est dérivable d'après les calculs précédents et elle vérifie l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

(iii) Les solutions de l'équation différentielle sur les intervalles de $\mathbb{R}^*$ sont

$$y(t) = 1 + \frac{A}{t} \quad A \in \mathbb{R}.$$

Si il existe une solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E), alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$y(t) = \begin{cases} 1 + a/t & \text{si } t < 0 \\ 1 + b/t & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

La fonction y est continue en 0, donc on doit avoir

$$y(0) = \lim_{t\to 0^-} y(t) = \lim_{t \to 0^+} y(t),$$

ce qui impose $a = b = 0$. Réciproquement, la fonction $y(t) = 1$ est dérivable et elle vérifie l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant l'équation. En prenant $x = 0$, on obtient $f(0) = 1$. De plus, la fonction f est nécessairement dérivable, et en dérivant la relation, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x f(x).$$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $y' = xy$, donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = A \exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Comme $A = f(0) = 1$, on obtient nécessairement que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Réciproquement, on vérifie que cette fonction est solution de l'équation.

Exercice 4 : On détermine les solutions de l'équation homogène en utilisant l'équation caractéristique, puis on détermine une solution particulière de l'équation différentielle. Les solutions sont

(i) $y(t) = A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{3t} - \dfrac{1}{2} t\mathrm{e}^t$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$,

(ii) $y(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t) + \dfrac{3}{10}\mathrm{e}^{-t}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$,

(iii) $y(t) = A\mathrm{e}^t + Bt\mathrm{e}^t + t^2\mathrm{e}^t$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$,

(iv) $y(t) = A\mathrm{e}^{-t}\cos(t) + B\mathrm{e}^{-t}\sin(t) - \dfrac{2}{5}\cos(t) + \dfrac{1}{5}\sin(t)$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$,

(v) $y(t) = A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{2t} + \dfrac{3}{20}\cos(2t) - \dfrac{1}{20}\sin(2t)$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$,

(vi) $y(t) = A\mathrm{e}^t\cos(t) + B\mathrm{e}^t\sin(t) + \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^t\sin(t)$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 5 :

1. En notant $z(t) = (1+\mathrm{e}^t)y(t)$, on a

$$z'(t) = (1+\mathrm{e}^t)y'(t) + \mathrm{e}^t y(t),$$
$$z''(t) = (1+\mathrm{e}^t)y''(t) + 2\mathrm{e}^t y'(t) + \mathrm{e}^t y(t).$$

   Ainsi, on obtient que si y est solution de (E), alors z vérifie l'équation différentielle

$$z'' + z = \mathrm{e}^t \qquad (E').$$

2. D'après la question précédent, en déterminant les solutions de (E'), on obtient

$$z(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^t \quad \text{avec} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

   Avec la relation $z(t) = (1+\mathrm{e}^t)y(t)$, on conclut que les solutions de (E) sont

$$y(t) = A\frac{\cos(t)}{1+\mathrm{e}^t} + B\frac{\sin(t)}{1+\mathrm{e}^t} + \frac{\mathrm{e}^t}{2(1+\mathrm{e}^t)} \quad \text{avec} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

   Réciproquement, on vérifie que ces fonctions sont solutions de (E).

Exercice 6 :

1. En notant $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$, on a
$$z'(t) = \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) \quad \text{et} \quad z''(t) = \mathrm{e}^{2t} y''(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t).$$
Si l'on pose $x = \mathrm{e}^t$ dans l'équation (E), elle se réécrit
$$\mathrm{e}^{2t} y''(\mathrm{e}^t) - 3\mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) + 4\mathrm{e}^t = 0.$$
On en déduit que z vérifie l'équation différentielle
$$z'' - 4z' + 4z = 0 \qquad (E').$$
2. D'après la question précédent, en déterminant les solutions de (E'), on obtient
$$z(t) = A\mathrm{e}^{2t} + Bt\mathrm{e}^{2t} \quad \text{avec} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$
Avec la relation $y(x) = z(\ln(x))$, on conclut que les solutions de (E) sont de la forme
$$y(t) = Ax^2 + Bx^2\ln(x) \quad \text{avec} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$
Réciproquement, on vérifie que ces fonctions sont solutions de (E).

Exercice 7 :

1. En remplaçant $y(x) = x^p$ dans l'équation (E), on obtient
$$p(p-1)x^2x^{p-2} + pxx^{p-1} - a^2x^p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (p^2 - a^2)x^p = 0.$$
On en déduit que y est solution de (E) si et seulement si $p = \pm a$.
2. Sur l'intervalle I, on a l'équivalence
$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{a^2}{x^2}y = 0,$$
donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 2. De plus, les fonctions $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto x^{-a}$ sont solutions de l'équation différentielle (E). Comme ces solutions ne sont pas colinéaires, elles forment une base de l'espace vectoriel des solutions. Ainsi, les solutions de (E) sont
$$y(x) = Ax^a + Bx^{-a} \quad \text{avec} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 8 :

1. Soit y une fonction polynomiale de terme dominant $a_n t^n$ avec $a_n \neq 0$. Si y est solution de (E), alors en isolant le terme dominant dans l'équation (E), on obtient
$$(n(n-1) - 2n + 2)a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)(n-2) = 0.$$
Ainsi le polynôme y est de degré au plus 2. En écrivant $y(t) = at^2 + bt + c$, puis en remplaçant dans (E), on obtient
$$(t+1)^2(2a) - 2(t+1)(2at+b) + 2(at^2 + bt + c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a - 2b + 2c = 0.$$
On conclut que les solutions polynomiales de (E) sont les fonctions
$$y(t) = A(t^2-1) + B(t+1) \quad \text{avec} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$
2. Sur l'intervalle $I =]-\infty, -1[$ ou $I =]-1, +\infty[$, on a l'équivalence
$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad y'' - \frac{2}{t+1}y' + \frac{2}{(t+1)^2}y = 0,$$
donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de (E) sur I est un espace vectoriel de dimension 2. A la question précédente, on a déterminé des solutions de (E) qui forment un espace de dimension 2. Ainsi, les solutions de (E) sur I sont
$$y(t) = A(t^2-1) + B(t+1) \quad \text{avec} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Si il existe une solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E), alors il existe $(A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4$ tel que
$$y(t) = \begin{cases} A(t^2-1) + B(t+1) & \text{si } t < -1 \\ C(t^2-1) + D(t+1) & \text{si } t > -1. \end{cases}$$
La fonction y est continue en -1, donc on doit avoir
$$y(-1) = \lim_{t \to -1^-} y(t) = \lim_{t \to -1^+} y(t),$$
ce qui ne donne pas de condition sur (A,B,C,D). La fonction y est dérivable en -1, donc on doit avoir
$$y'(-1) = \lim_{t \to -1^-} y'(t) = \lim_{t \to -1^+} y'(t),$$

ce qui impose $B-2A=D-2C$. La fonction y est deux fois dérivable en -1, donc on doit avoir

$$y''(-1)=\lim_{t\to-1^-}y''(t)=\lim_{t\to-1^+}y''(t),$$

ce qui impose $A=C$. Réciproquement, la fonction

$$y(t)=A(t^2-1)+B(t+1)\quad\text{avec}\quad(A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

est deux fois dérivable et elle vérifie l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 :

1. Soit y une fonction polynomiale de terme dominant a_nt^n avec $a_n\neq0$. Si y est solution de (E), alors en isolant le terme dominant dans l'équation (E), on obtient
$$(n(n-1)-2)a_n=0\quad\Leftrightarrow\quad(n-2)(n+1)=0.$$
Ainsi le polynôme y est de degré 2. En écrivant $y(t)=at^2+bt+c$, puis en remplaçant dans (E), on obtient
$$2a(t^2+1)-2(at^2+bt+c)=0\quad\Leftrightarrow\quad b=0\quad\text{et}\quad a=c.$$
On conclut que les solutions polynomiales de (E) sont les fonctions
$$y(t)=A(t^2+1)\quad\text{avec}\quad A\in\mathbb{R}.$$

2. La solution $h(t)=t^2+1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On peut utiliser la méthode de la variation de la constante. En posant $y=\lambda h$ dans (E), on obtient
$$(t^2+1)\lambda''+4t\lambda'=0.$$
En notant $\mu=\lambda'$ et en résolvant $(t^2+1)\mu'+4t\mu=0$, on obtient
$$\lambda'(t)=\mu(t)=\frac{A}{(t^2+1)^2}\quad\text{avec}\quad A\in\mathbb{R},$$
donc
$$\lambda(t)=\frac{A}{2}\left(\frac{t}{t^2+1}+\operatorname{Arctan}(t)\right)+B\quad\text{avec}\quad(A,B)\in\mathbb{R}^2.$$
Finalement, les solutions de (E) sur I sont
$$y(t)=\alpha\big(t+(t^2+1)\operatorname{Arctan}(t)\big)+\beta(t^2+1)\quad\text{avec}\quad(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

Exercice 10 :

1. Soit y une fonction polynomiale de terme dominant a_nt^n avec $a_n\neq0$. Si y est solution de (H), alors en isolant le terme dominant dans l'équation (H), on obtient
$$(n(n-1)+n-1)a_n=0\quad\Leftrightarrow\quad(n+1)(n-1)=0.$$
Ainsi le polynôme y est de degré au plus 1. En écrivant $y(t)=at+b$, puis en remplaçant dans (H), on obtient
$$at-(at+b)=0\quad\Leftrightarrow\quad b=0.$$
On conclut que les solutions polynomiales de (H) sont les fonctions
$$y(t)=At\quad\text{avec}\quad A\in\mathbb{R}.$$

2. On commence par remarquer que $y_p:t\mapsto-1$ est une solution particulière de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$. Il suffit donc de résoudre l'équation homogène (H) pour déterminer toutes les solutions de (E). Sur l'intervalle $I=]-\infty,0[$ ou $I=]0,+\infty[$, la solution $h:t\mapsto t$ ne s'annule pas. On peut utiliser la méthode de la variation de la constante. En posant $y=\lambda h$ dans (H), on obtient
$$t^3\lambda''+3t^2\lambda'=0.$$
En notant $\mu=\lambda'$ et en résolvant $t^3\mu'+3t^2\mu=0$, on obtient
$$\lambda'(t)=\mu(t)=\frac{A}{t^3}\quad\text{avec}\quad A\in\mathbb{R},$$
donc
$$\lambda(t)=\frac{A}{t^2}+B\quad\text{avec}\quad(A,B)\in\mathbb{R}^2.$$
Finalement, les solutions de (H) sur I sont
$$y_h(t)=\frac{A}{t}+Bt\quad\text{avec}\quad(A,B)\in\mathbb{R}^2$$
et on conclut que les solutions de (E) sur I sont
$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=\frac{A}{t}+Bt-1\quad\text{avec}\quad(A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

3. Si il existe une solution $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de (E), alors il existe $(A,B,C,D)\in\mathbb{R}^4$ tel que

$$y(t)=\begin{cases} A/t+Bt-1 & \text{si } t<0\\ C/t+Dt-1 & \text{si } t>0.\end{cases}$$

La fonction y est continue en 0, donc on doit avoir

$$y(0)=\lim_{t\to 0^-} y(t)=\lim_{t\to 0^+} y(t),$$

ce qui impose $A=C=0$. La fonction y est dérivable en 0, donc on doit avoir

$$y'(0)=\lim_{t\to 0^-} y'(t)=\lim_{t\to 0^+} y'(t),$$

ce qui impose $B=D$. Réciproquement, la fonction

$$y(t)=Bt-1 \quad \text{avec} \quad B\in\mathbb{R}.$$

est deux fois dérivable d'après les calculs précédents et elle vérifie l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 :

1. Soit y une fonction développable en série entière dont le rayon de convergence est $R>0$. On peut écrire

$$\forall t\in]-R,R[,\quad y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

En substituant dans (E), on obtient

$$\begin{aligned}&(1+t^2)\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}+4t\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1}+2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n=0\\ \Leftrightarrow\ &\sum_{n=0}^{+\infty}(n(n-1)+4n+2)a_n t^n+\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}=0\\ \Leftrightarrow\ &\sum_{n=0}^{+\infty}\Big((n+1)(n+2)a_n+(n+2)(n+1)a_{n+2}\Big)t^n=0.\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2}=-a_n.$$

Ainsi, on peut écrire

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad a_{2p}=(-1)^p a_0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1}=(-1)^p a_1,$$

donc

$$y(t)=a_0\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^{2p}+a_1\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^{2p+1}=\frac{a_0+a_1 t}{1+t^2}.$$

Réciproquement, cette fonction est développable en série entière sur $]-1,1[$. Ainsi, les solutions de (E) développables en série entière sont les fonctions

$$y(t)=\frac{At+B}{1+t^2} \quad \text{avec} \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

2. On vérifie que les fonctions de la forme

$$y(t)=\frac{At+B}{1+t^2} \quad \text{avec} \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

sont des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. L'ensemble de ces fonctions forment un espace vectoriel de dimension 2. De plus, on a l'équivalence

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad y''+\frac{4t}{1+t^2}y'+\frac{2}{1+t^2}y=0,$$

donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 2. On conclut que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$y(t)=\frac{At+B}{1+t^2} \quad \text{avec} \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

Exercice 12 :

1. Soit y une fonction développable en série entière dont le rayon de convergence est $R>0$. On peut écrire

$$\forall x \in]-R,R[, \quad y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

En substituant dans (E), on obtient

$$\begin{aligned} & x(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+(1-3x)\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{n=0}^{+\infty}(-n(n-1)-3n-1)a_n x^n+\sum_{n=1}^{+\infty}(n(n-1)+n)a_n x^{n-1}=0 \\ \Leftrightarrow & -\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^2 a_n x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^2 a_{n+1}x^n=0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(-(n+1)^2 a_n+(n+1)^2 a_{n+1}\Big)x^n=0. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1}=a_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n=a_0.$$

Ainsi, on peut écrire

$$y(x)=a_0\sum_{n=0}^{+\infty} x^n=\frac{a_0}{1-x}.$$

Réciproquement, cette fonction est développable en série entière sur $]-1,1[$. Ainsi, les solutions de (E) développables en série entière sont les fonctions

$$y(x)=\frac{A}{1-x} \quad \text{avec} \quad A\in\mathbb{R}.$$

2. On commence par vérifier que la fonction $h(x)=(1-x)^{-1}$ est une solution de (E) qui ne s'annule pas sur les intervalles $I=]-\infty,0[$, $I=]0,1[$ ou $I=]1,+\infty[$.

On peut utiliser la méthode de la variation de la constante. En posant $y=\lambda h$ dans (E), on obtient

$$x\lambda''+\lambda'=0.$$

En notant $\mu=\lambda'$ et en résolvant $x\mu'+\mu=0$, on obtient

$$\lambda'(x)=\mu(x)=\frac{A}{x} \quad \text{avec} \quad A\in\mathbb{R},$$

donc

$$\lambda(x)=A\ln(|x|)+B \quad \text{avec} \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

Finalement, les solutions de (E) sur I sont

$$y(x)=\frac{A\ln(|x|)}{1-x}+\frac{B}{1-x} \quad \text{avec} \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

3. Si $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une solution de (E), alors il existe $(A,B,C,D,E,F)\in\mathbb{R}^6$ tel que

$$y(x)=\begin{cases} (A\ln(-x)+B)/(1-x) & \text{si} \quad x<0 \\ (C\ln(x)+D)/(1-x) & \text{si} \quad 0<x<1 \\ (E\ln(x)+F)/(1-x) & \text{si} \quad x>1. \end{cases}$$

La fonction y est continue en 0, donc on doit avoir

$$y(0)=\lim_{x\to 0^-} y(x)=\lim_{x\to 0^+} y(x),$$

ce qui impose $A=C=0$ et $B=D$. La fonction y est continue en 1, donc on doit avoir

$$y(1)=\lim_{x\to 1^-} y(x)=\lim_{x\to 1^+} y(x),$$

ce qui impose $D=F=0$ et $C=E$. Finalement la seule de solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle.

Exercice 13 :

1. Soit y une fonction développable en série entière dont le rayon de convergence est $R > 0$. On peut écrire

$$\forall x \in]-R, R[, \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

En substituant dans (H), on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) - n + 1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + n) a_n x^{n+1} = 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)^2 a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)^2 a_{n-1} x^n = 0 \\ \Leftrightarrow &\ a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n-1)^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1} \right) x^n = 0. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit $a_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = a_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = a_1.$$

Ainsi, on peut écrire

$$y(x) = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{a_1 x}{1-x}.$$

Réciproquement, cette fonction est développable en série entière sur $]-1, 1[$. Ainsi, les solutions de (H) développables en série entière sont les fonctions

$$y(x) = \frac{Ax}{1-x} \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R}.$$

2. On commence par vérifier que la fonction $h(x) = x/(1-x)$ est une solution de (E) qui ne s'annule pas sur les intervalles $I =]-\infty, 0[$, $I =]0, 1[$ ou $I =]1, +\infty[$. On peut utiliser la méthode de la variation de la constante. En posant $y = \lambda h$ dans (E), on obtient

$$x^3 \lambda'' + x^2 \lambda' = 2x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x\lambda'' + \lambda' = 2x.$$

En notant $\mu = \lambda'$ et en résolvant $x\mu' + \mu = 2x$, on obtient

$$\lambda'(x) = \mu(x) = \frac{A}{x} + x \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R},$$

donc

$$\lambda(x) = A \ln(|x|) + B + \frac{x^2}{2} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Finalement, les solutions de (E) sur I sont

$$y(x) = \frac{Ax\ln(|x|)}{1-x} + \frac{Bx}{1-x} + \frac{x^3}{2(1-x)} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution de (E), alors il existe $(A, B, C, D, E, F) \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$y(x) = \begin{cases} (Ax\ln(-x) + Bx + x^3/2)/(1-x) & \text{si} \quad x < 0 \\ (Cx\ln(x) + Dx + x^3/2)/(1-x) & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ (Ex\ln(x) + Fx + x^3/2)/(1-x) & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

La fonction y est continue en 0, donc on doit avoir

$$y(0) = \lim_{x \to 0^-} y(x) = \lim_{x \to 0^+} y(x),$$

ce qui ne donne pas de condition. La fonction y est dérivable en 0, donc on doit avoir

$$y'(0) = \lim_{x \to 0^-} y'(x) = \lim_{x \to 0^+} y'(x),$$

ce qui impose $A = C = 0$ et $B = D$. La fonction y est continue en 1, donc on doit avoir

$$y(1) = \lim_{x \to 1^-} y(x) = \lim_{x \to 1^+} y(x),$$

ce qui impose $D = F = -1/2$ et $C = E$. Réciproquement, la fonction

$$y(x) = -\frac{x(x+1)}{2}$$

est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 :

(i) On a

$$A=\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\left\{\begin{array}{lcl}x(t)&=&\lambda e^{2t}+2\mu e^{3t}\\y(t)&=&\lambda e^{2t}+\mu e^{3t}\end{array}\right.\quad\text{avec}\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

(ii) On a

$$A=\begin{pmatrix}-1&3\\-2&4\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\left\{\begin{array}{lcl}x(t)&=&3\lambda e^{t}+\mu e^{2t}\\y(t)&=&2\lambda e^{t}+\mu e^{2t}\end{array}\right.\quad\text{avec}\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

(iii) On a

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&2\\1&0&-1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&6\end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\left\{\begin{array}{lcl}x(t)&=&\alpha+2\beta+\gamma e^{6t}\\y(t)&=&-\beta+2\gamma e^{6t}\\z(t)&=&\alpha-\gamma e^{6t}\end{array}\right.\quad\text{avec}\quad(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3.$$

(iv) On a

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&2&1\\1&0&1\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\left\{\begin{array}{lcl}x(t)&=&\alpha+\gamma e^{2t}\\y(t)&=&\alpha-\beta e^{t}+\gamma e^{2t}\\z(t)&=&-\alpha+\beta e^{t}+\gamma e^{2t}\end{array}\right.\quad\text{avec}\quad(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3.$$

(v) On a

$$A=\begin{pmatrix}1&-4\\1&-3\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\left\{\begin{array}{lcl}x(t)&=&2\lambda e^{-t}+\mu(2t+1)e^{-t}\\y(t)&=&\lambda e^{-t}+\mu t e^{-t}\end{array}\right.\quad\text{avec}\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

(vi) On a

$$A=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&-3\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}-2&1\\0&-2\end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\left\{\begin{array}{lcl}x(t)&=&\lambda e^{-2t}+\mu(t+1)e^{-2t}\\y(t)&=&\lambda e^{-2t}+\mu t e^{-2t}\end{array}\right.\quad\text{avec}\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

Exercice 15 :

(i) On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

donc on en déduit que les solutions complexes du système sont

$$X(t) = \alpha \underbrace{\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_1(t)} + \beta \underbrace{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_2(t)} + \gamma \underbrace{\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_3(t)}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$. Pour obtenir les solutions réelles, on remplace X_2 et X_3 qui sont conjugués par la leur partie réelle et imaginaire. On obtient finalement

$$X(t) = \alpha \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + \gamma \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

(ii) On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

donc on en déduit que les solutions complexes du système sont

$$X(t) = \alpha \underbrace{\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}}_{X_1(t)} + \beta \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{X_2(t)} + \gamma \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{X_3(t)}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$. Pour obtenir les solutions réelles, on remplace X_2 et X_3 qui sont conjugués par la leur partie réelle et imaginaire. On obtient finalement

$$X(t) = \alpha \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 16 :

(i) On réduit la matrice A en fonction de t.

$$A = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice P ne dépend pas de t, en posant $Y = P^{-1}X$, le système est équivalent à $Y' = DY$. On en déduit Y, puis en remplaçant dans $X = PY$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & \lambda \mathrm{e}^{t} + \mu \mathrm{e}^{t^2/2} \\ y(t) & = & \lambda \mathrm{e}^{t} + 2\mu \mathrm{e}^{t^2/2} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) Comme pour le premier, on a

$$A = \begin{pmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} t+1 & 0 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & \lambda \exp\left(\dfrac{(t+1)^2}{2}\right) + \mu \exp\left(\dfrac{(t-1)^2}{2}\right) \\ y(t) & = & -\lambda \exp\left(\dfrac{(t+1)^2}{2}\right) - 2\mu \exp\left(\dfrac{(t-1)^2}{2}\right) \end{array} \right.$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 17 : Une fonction y est solution de (E) si et seulement si y est la première composante d'un triplet (x_1, x_2, x_3) solution du système différentiel

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

donc on en déduit que les solutions de (E) sont

$$y(t) = x_1(t) = \alpha \mathrm{e}^{t} + \beta \mathrm{e}^{-t} + \gamma \mathrm{e}^{2t} \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$