CHAPITRE 13
Équations différentielles

I - Révisions sur les équations différentielles

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

(i) $y' + y = t\mathrm{e}^{-t}$, (ii) $y' + 2y = t^2 - 2t + 3$,

(iii) $y' - 2y = \cos(t) + \sin(t)$, (iv) $(t^2+1)y' - ty = (t^2+1)^{3/2}$.

Exercice 2 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

(i) $ty' - 2y = t^3$, (ii) $t^2 y' - y = 0$, (iii) $ty' + y = 1$.

Exercice 3 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + 1.$$

Exercice 4 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

(i) $y'' - 4y' + 3y = \mathrm{e}^t$, (ii) $y'' + 9y = 3\mathrm{e}^{-t}$,

(iii) $y'' - 2y' + y = 2\mathrm{e}^t$, (iv) $y'' + 2y' + 2y = \sin(t)$,

(v) $y'' - 3y' + 2y = \sin(2t)$, (vi) $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^t\cos(t)$.

Exercice 5 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1+\mathrm{e}^t)y'' + 2\mathrm{e}^t y' + (2\mathrm{e}^t + 1)y = \mathrm{e}^t. \qquad (E)$$

1. Soit y une solution de (E). Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par la fonction $z(t) = (1+\mathrm{e}^t)y(t)$.
2. En déduire les solutions de (E).

Exercice 6 : On considère sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0. \qquad (E)$$

1. Soit y une solution de (E). Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par la fonction $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$.
2. En déduire les solutions de (E) sur I.

II - Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 7 : Soit $a > 0$. On considère sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$x^2 y'' + xy' - a^2 y = 0. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions de (E) de la forme $y : x \mapsto x^p$ pour $p \in \mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(t+1)^2 y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0. \qquad (E)$$

1. Déterminer les fonctions polynomiales solutions de (E).
2. En déduire les solutions de (E) sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$.
3. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(t^2+1)y'' - 2y = 0. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de (E).
2. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$t^2y'' + ty' - y = 1. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de l'équation homogène (H).
2. En déduire les solutions de (E) sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de (E).
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de (E).
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation homogène (H) associée à (E).
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

III - Systèmes différentiels linéaires

Exercice 14 : Résoudre les systèmes différentiels suivants.

$$(i)\ \begin{cases} x' = 4x-2y \\ y' = x+y, \end{cases} \qquad (ii)\ \begin{cases} x' = -x+3y \\ y' = -2x+4y, \end{cases}$$

$$(iii)\ \begin{cases} x' = x+2y-z \\ y' = 2x+4y-2z \\ z' = -x-2y+z, \end{cases} \qquad (iv)\ \begin{cases} x' = y+z \\ y' = -x+2y+z \\ z' = x+z, \end{cases}$$

$$(v)\ \begin{cases} x' = x-4y \\ y' = x-3y, \end{cases} \qquad (vi)\ \begin{cases} x' = -x-y \\ y' = x-3y. \end{cases}$$

Exercice 15 : Déterminer les solutions réelles du système différentiel $X' = AX$ avec les matrices

$$(i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16 : Résoudre les systèmes différentiels suivants.

$$(i)\ \begin{cases} x' = (2-t)x+(t-1)y \\ y' = 2(1-t)x+(2t-1)y, \end{cases} \qquad (ii)\ \begin{cases} x' = (t+3)x+2y \\ y' = -4x+(t-3)y. \end{cases}$$

Exercice 17 : En se ramenant à un système différentiel du premier ordre, résoudre l'équation différentielle

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0. \qquad (E)$$