# CHAPITRE 13
# Équations différentielles

## Plan du chapitre



## Introduction

Une équation différentielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est une équation dont l'inconnue est une fonction $y : I \to \mathbb{R}^d$ dérivable $n$ fois et se présentant sous la forme

$$\forall t \in I, \quad f\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)\right) = 0$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est une fonction continue sur une partie ouverte $\Omega$ de $\mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^d\right)^{n+1}$. Dans les applications, les fonctions représentent généralement des quantités physiques, leurs dérivées représentent leurs taux d'évolution et l'équation différentielle est une relation entre les deux.

La notion d'équation différentielle est née à la fin du XVIIe siècle lorsque Newton et Leibniz fondèrent le calcul différentiel et le calcul intégral : de nombreux problèmes issus de la géométrie ou de la mécanique conduisaient naturellement à la résolution de systèmes différentiels. À cette époque, résoudre une équation différentielle consistait à écrire la solution générale de l'équation avec des fonctions élémentaires.

Au cours du XVIIIe siècle, de nombreuses équations différentielles (linéaires, de Bernoulli, de Ricatti,...) ont été résolues. En parallèle, une nouvelle méthode de résolution (que nous étudierons) se développe : elle repose sur la recherche des solutions sous la forme d'une série entière. Cependant cette dernière n'est pas employée rigoureusement : les mathématiciens de cette période ne se préoccupe pas de la convergence de ces séries, considérant qu'elles convergent inconditionnellement.

Jusqu'au XIXesiècle, l'existence des solutions d'une équation différentielle étaient communément admise et on ne cherchait pas en général à préciser les domaines où ses solutions étaient définies. C'est Cauchy qui étudia pour la première fois ces problèmes dans les cours qu'ils dispensaient à l'École Royale Polytechnique à partir de 1820. Il montre, sous de bonnes hypothèses, l'existence et l'unicité d'une solution dans le voisinage d'un point donné. En 1868, Lipschitz remarqua que le résultat de Cauchy subsiste avec des hypothèses plus faibles.

Les équations différentielles jouent un rôle de premier plan dans de nombreuses disciplines, notamment l'ingénierie, la physique, l'économie et la biologie. Leur importance amena naturellement cette branche des mathématiques à devenir l'une des plus importantes de nos jours.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 et les systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants. Nous verrons notamment comment résoudre ces équations dans les cas favorables.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

# I - Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Dans cette partie, on fixe un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et des fonction continues $a, b, c : I \to \mathbb{K}$. Nous allons étudier l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 définie par

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \qquad (E)$$

dont l'inconnue est une fonction deux fois dérivable $y : I \to \mathbb{K}$.

**Remarques 1 :**

a) On sait résoudre l'équation $(E)$ lorsque les fonctions $a$ et $b$ sont constantes et la fonction $c$ est de la forme $c(t) = Ae^{\lambda t}$ où $(A, \lambda) \in \mathbb{K}^2$.

b) Il n'existe pas de méthodes générales pour résoudre l'équation $(E)$.

## I.A - Problème de Cauchy

Rappelons qu'un problème de Cauchy est un système composé d'une équation différentielle et d'une ou plusieurs conditions initiales.

**Théorème de Cauchy :** Soient $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. Le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' + a(t)y' + b(t)y & = & c(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \\ y'(t_0) & = & y_1 \end{array} \right.$$

admet une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$.

**Remarque 2 :** La méthode d'Euler permet de construire une solution approchée du problème de Cauchy.

## I.B - Équation homogène

**Définition (Équation homogène) :** L'équation homogène associée à l'équation différentielle $(E)$ est l'équation différentielle linéaire

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0. \qquad (H)$$

**Théorème de structure de l'ensemble des solutions :** L'ensemble des solutions de l'équation $(H)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.

**Remarque 3 :** Ainsi, si on a deux solutions $y_1 : I \to \mathbb{K}$ et $y_2 : I \to \mathbb{K}$ de $(H)$ non colinéaires, alors les solutions de $(H)$ sont les combinaisons linéaires de $y_1$ et $y_2$. Autrement dit, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(H)$ est

$$\mathscr{S}_H = \left\{ \alpha y_1 + \beta y_2 : I \to \mathbb{K} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

**Exemple 1 :** On considère sur $I = ]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y'' - \frac{2}{t^2} y = 0. \qquad (H)$$

Les fonctions $t \mapsto t^{-1}$ et $t \mapsto t^2$ sont des solutions de $(H)$ non colinéaires, donc les solutions de $(H)$ sont les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ de la forme

$$y(t) = \frac{\alpha}{t} + \beta t^2 \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

**Proposition (Principe de superposition) :** Soient $c_1 : I \to \mathbb{K}$ et $c_2 : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues. On suppose que $y_1 : I \to \mathbb{K}$ et $y_2 : I \to \mathbb{K}$ sont respectivement solutions des équations différentielles

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c_1(t) \quad \text{et} \quad y'' + a(t)y' + b(t)y = c_2(t).$$

Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda y_1 + \mu y_2 : I \to \mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = \lambda c_1(t) + \mu c_2(t).$$

**Proposition 1 :** Soit $y_p : I \to \mathbb{K}$ une solution (particulière) de $(E)$. Les solutions de l'équation $(E)$ sont exactement les fonctions de la forme $y = y_h + y_p$ où $y_h : I \to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation homogène $(H)$.

**Exemple 2 :** On considère sur $I = ]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y'' - \frac{2}{t^2} y = -\frac{3}{t^3}. \qquad (E)$$

La fonction $t \mapsto t^{-1} \ln(t)$ est une solution de $(E)$. On en déduit en reprenant l'exemple précédent que les solutions de $(E)$ sont les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ de la forme

$$y(t) = \frac{\alpha}{t} + \beta t^2 + \frac{\ln(t)}{t} \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

## II - Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et des coefficients $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ pour $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$. Nous allons étudier le système différentiel linéaire à coefficients constants

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ x_2' & = & a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ & \vdots & \\ x_n' & = & a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x_1, \ldots, x_n)$ où $x_1, \ldots, x_n : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ sont des fonctions dérivables. Si l'on note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

alors le système précédent est équivalent à l'équation

$$X' = AX \qquad (S)$$

d'inconnue une fonction dérivable $X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$.

### II.A - Problème de Cauchy

**Théorème de Cauchy :** Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{K}^n$. Le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X' & = & AX \\ X(t_0) & = & X_0 \end{array} \right.$$

admet une unique solution $X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$.

**Théorème de structure de l'ensemble des solutions :** L'ensemble des solutions du système $(S)$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n$ de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$.

**Remarque 4 :** Dans le cas où on est capable de réduire la matrice $A$, nous verrons une méthode pour résoudre explicitement le système $(S)$.

### II.B - Comportement asymptotique des solutions

Nous allons étudier le comportement des solutions $X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ de $(S)$ lorsque la variable $t$ tend vers $+\infty$.

**Théorème 1 :** On suppose que $A$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

(i) Toutes les valeurs propres de $A$ ont une partie réelle strictement négative si et seulement si pour toutes solutions $X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ de $(S)$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Toutes les valeurs propres de $A$ ont une partie réelle négative si et seulement si toutes les solutions $X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ de $(S)$ sont bornées sur $[0, +\infty[$.

### II.C - Liens entre les équations linéaires et les systèmes linéaires

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. L'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre $n$ à coefficients constants est

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (E)$$

d'inconnue une fonction $n$ fois dérivable $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. On peut ramener l'étude de cette équation différentielle scalaire linéaire d'ordre $n$ à l'étude d'un système différentiel linéaire.

**Proposition 2 :** Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction $n$ fois dérivables. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) La fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est solution de $(E)$.

(ii) La fonction $y$ est la première composante d'un $n$-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ solution du système différentiel linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & x_3 \\ & \vdots & \\ x_{n-1}' & = & x_n \\ x_n' & = & -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \cdots - a_1 x_2 - a_0 x_1. \end{array}\right.$$

**Remarque 5 :** Dans le cas $n = 2$, si l'on considère l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (E)$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,alors on peut lui associer le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & -ax_2 - bx_1. \end{array}\right.$$

En résolvant ce système différentiel, on en déduit les solutions de $(E)$. On retrouve bien les mêmes solutions qu'en employant la méthode déjà connues (avec l'équation caractéristique) pour résoudre $(E)$.

## III - Méthodes

Dans cette partie, on fixe un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et des fonction continues $a, b, c : I \to \mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle linéaires scalaires d'ordre 2 définie par

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t). \qquad (E)$$

Il n'y a pas de méthode générale permettant de résoudre l'équation $(E)$.

### III.A - Méthode de la variation de la constante

Rappelons que l'équation homogène associée à $(E)$ est l'équation

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0. \qquad (H)$$

On peut appliquer cette méthode pour résoudre $(E)$ si l'on connait une solution de l'équation homogène $(H)$ qui ne s'annule pas sur $I$.

**Méthode : La variation de constante**
Supposons que l'on ait une solution $h : I \to \mathbb{K}$ de $(H)$ qui ne s'annule pas sur $I$.

1) On définit $\lambda : I \to \mathbb{R}$ qui est deux fois dérivable par la relation $y = \lambda h$.

2) On remplace $y = \lambda h$ dans l'équation $(E)$. On obtient

$$\begin{aligned} (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda'' h + 2\lambda' h' + \lambda h'' + a(t)(\lambda' h + \lambda h') + b(t)\lambda h = c(t) \\ &\Leftrightarrow \quad h\lambda'' + (2h' + a(t)h)\lambda' + \underbrace{(h'' + a(t)h' + b(t)h)}_{0 \text{ car } h \text{ est solution de } (H)}\lambda = c(t) \\ &\Leftrightarrow \quad h\lambda'' + (2h' + a(t)h)\lambda' = c(t) \end{aligned}$$

3) En posant $\mu = \lambda'$, on doit donc résoudre l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 suivante

$$h\mu' + (2h' + a(t)h)\mu = c(t).$$

On en déduit $\mu = \lambda'$, puis $\lambda$, puis la fonction $y$ en utilisant la relation $y = \lambda h$.

**Exemple 3 :** Nous allons résoudre sur $I = ]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y'' - \frac{3}{t}y' + \frac{4}{t^2}y = t \quad \Leftrightarrow \quad t^2y'' - 3ty' + 4y = t^3. \qquad (E)$$

On remarque que $h : t \mapsto t^2$ est solution de l'équation homogène

$$t^2y'' - 3ty' + 4y = 0. \qquad (H)$$

Comme $h$ ne s'annule pas sur $I$, on peut donc appliquer la méthode de la variation de la constante pour en déduire toutes les solutions de $(E)$. On remplace $y = \lambda h$ dans $(E)$ où $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivables

$$\begin{aligned}(E) \quad &\Leftrightarrow \quad t^2(\lambda''h + 2\lambda'h' + \lambda h'') - 3t(\lambda'h + \lambda h') + 4\lambda h = t^3 \\ &\Leftrightarrow \quad t^2h\lambda'' + (2t^2h' - 3th)\lambda' + \underbrace{(t^2h'' - 3th' + 4h)}_{0 \text{ car } h \text{ est solution de } (H)} \lambda = t^3 \\ &\Leftrightarrow \quad t^4\lambda'' + (4t^3 - 3t^3)\lambda' = t^3 \\ &\Leftrightarrow \quad t\lambda'' + \lambda' = 1.\end{aligned}$$

En notant $\mu = \lambda'$ et en résolvant l'équation différentielle $t\mu' + \mu = 1$, on obtient

$$\lambda'(t) = \mu(t) = \frac{A}{t} + 1 \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R}.$$

En prenant les primitives de cette égalité, on trouve

$$\lambda(t) = A\ln(t) + t + B \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Finalement, on en déduit les solutions $y$ de $(E)$ sont

$$y(t) = t^2\lambda(t) = At^2\ln(t) + Bt^2 + t^3 \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

## III.B - Recherche des solutions polynômiales

On peut essayer de déterminer les solutions polynomiales de $(E)$.

**Méthode : Recherche des solutions polynômiales**

1) On détermine les degrés possibles pour la fonction polynomiale en utilisant son terme dominant.

2) On substitue dans l'équation $(E)$ et on identifie les coefficients.

**Exemple 4 :** Cherchons les solutions polynomiales de l'équation différentielle

$$t(t+1)y'' + (t-1)y' - y = 0. \qquad (E)$$

Supposons qu'il existe une fonction polynomiale $P$ de degré $n \in \mathbb{N}$ solution de $(E)$. Si on note $a_n t^n$ avec $a_n \neq 0$ le terme dominant de $P$, alors le terme dominant du polynôme

$$t(t+1)P'' + (t-1)P' - P \quad \text{est} \quad (n(n-1) + n - 1)a_n t^n.$$

Comme $P$ est solution de $(E)$, on obtient donc

$$n(n-1) + n - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = 1.$$

Ainsi, $P$ est de degré 1, donc il s'écrit $P(t) = at + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. En substituant dans $(E)$, on obtient

$$(t-1)a - (at + b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -a.$$

Ainsi les solutions polynomiales de $(E)$ sont les fonctions

$$P(t) = a(t-1) \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$

**Remarque 6 :** En général, il est possible que l'équation différentielle n'admette pas de solution polynomiale.

### III.C - Recherche des solutions développables en série entière

On peut essayer de déterminer les solutions développables en série entière de $(E)$.

**Méthode : Recherche des solutions développables en série entière**
On raisonne par analyse et synthèse.

1) *Analyse :* On suppose qu'il existe une solution $y$ de $(E)$ sous la forme d'une série entière admettant un rayon de convergence $R>0$, i.e.

$$\forall t \in ]-R,R[, \quad y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

2) En substituant $y(t)$ dans $(E)$, on détermine une relation de récurrence pour les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Si possible, on détermine une expression explicite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $y$.
4) *Synthèse :* On considère la fonction définie par la série entière avec l'expression que l'on a déterminé pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'analyse.
   a) Si le rayon de convergence de la série entière obtenue est nul, alors il n'y a pas de solution de $(E)$ développable en série entière.
   b) Si le rayon de convergence $R$ de la série entière est non nul, alors $y$ est une solution de $(E)$ développable en série entière sur $]-R,R[$.

**Exemple 5 :** Cherchons les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$y''+2ty'+2y=0. \qquad (E)$$

*Analyse :* On suppose qu'il existe une solution $y$ de $(E)$ sous la forme d'une série entière admettant un rayon de convergence $R>0$, i.e.

$$\forall t \in ]-R,R[, \quad y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

En substituant dans $(E)$, on obtient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}+2t\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1}+2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n=0.$$

En effectuant un changement d'indice dans la première somme, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n+2\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n+2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n=0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(2n+2)a_n\right]t^n=0.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit la relation

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)a_{n+2}+(2n+2)a_n=0$$
$$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \quad a_{n+2}=-\frac{2}{n+2}a_n.$$

On remarque que l'on a l'expression explicite suivante

$$\forall p\in\mathbb{N}, \quad a_{2p}=\frac{(-1)^p}{p!}a_0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1}=\frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}a_1.$$

On en déduit que si $y$ est solution de $(E)$, alors

$$y(t)=a_0\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!}t^{2p}+a_1\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}t^{2p+1}$$
$$=a_0\exp(-t^2)+a_1\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}t^{2p+1}.$$

*Synthèse :* les deux séries entières ci-dessus ont pour rayon de convergence $+\infty$. Ainsi, les solutions de $(E)$ développable en série entière sont les fonctions

$$y(t)=A\exp(-t^2)+B\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}t^{2p+1} \quad \text{avec} \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

Dans ce cas, on sait d'après le cours que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. On peut donc même en déduire qu'il n'y a pas d'autre solution à l'équation différentielle $(E)$ que celles ci-dessus.

**Exemple 6 :** Cherchons les solutions développables en série entière de l'équation différentielle
$$t^2y' + (t-1)y = 1. \qquad (E)$$

*Analyse :* On suppose qu'il existe une solution $y$ de $(E)$ sous la forme d'une série entière admettant un rayon de convergence $R > 0$
$$\forall t \in ]-R, R[, \quad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

En substituant dans $(E)$, on obtient
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 1.$$

En effectuant un changement d'indice dans la première somme, on obtient
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_{n-1} t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 1 \Leftrightarrow a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [n a_{n-1} - a_n]\, t^n = 1.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit la relation
$$\left(a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n a_{n-1} - a_n = 0\right) \Leftrightarrow \left(a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = n a_{n-1}\right).$$

On en déduit que $a_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc si $y$ est solution de $(E)$, alors
$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n! t^n.$$

*Synthèse :* le rayon de convergence de la série entière ci-dessus est 0. Ainsi l'équation différentielle $(E)$ n'admet pas de solution développable en série entière.

## III.D - Résoudre un système différentiel linéaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On considère un système différentiel donné sous forme matriciel
$$X' = AX. \qquad (S)$$

**Méthode : Résoudre un système différentiel linéaire**

1) On commence par réduire la matrice $A$ (éventuellement sur $\mathbb{C}$ si ses valeurs propres ne sont pas réelles). On détermine une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale ou triangulaire supérieure.
2) En remplaçant dans le système, on obtient
$$X' = AX \;\Leftrightarrow\; X' = PTP^{-1}X \;\Leftrightarrow\; P^{-1}X' = TP^{-1}X \;\Leftrightarrow\; Y' = TY$$
en posant $Y = P^{-1}X$.
3) On détermine les solutions $Y$ du système différentiel $Y' = TY$.
4) En écrivant $X = PY$, on en déduit les solutions de $(S)$.
5) Si l'on a des solutions complexes et que l'on veut obtenir les solutions réelles, on remplace les éléments de la base des solutions complexes qui sont conjugués par la partie réelle et la partie imaginaire d'un des deux éléments conjugués.

**Remarque 7 :** Il n'y a pas besoin de calculer $P^{-1}$ pour appliquer la méthode !

**Exemple 7 :** Résolvons le système différentiel sur $\mathbb{R}$ défini par
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}. \qquad (S)$$

En réduisant $A$ sur $\mathbb{C}$, on trouve
$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 2+2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 2-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-2\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient que $Y$ est solution du système différentiel
$$Y' = DY \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u' & = & (2+2\mathrm{i})\,u \\ v' & = & (2-2\mathrm{i})\,v \end{array} \right. \quad \text{si} \quad Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $u(t)=\lambda e^{(2+2i)t}$ et $v(t)=\mu e^{(2-2i)t}$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, donc

$$Y(t)=\begin{pmatrix}\lambda e^{(2+2i)t}\\ \mu e^{(2-2i)t}\end{pmatrix}.$$

En substituant dans $X=PY$, on trouve les solutions complexes de $(S)$

$$X(t)=\underbrace{\lambda e^{(2+2i)t}\begin{pmatrix}1\\1-2i\end{pmatrix}}_{X_1(t)}+\underbrace{\mu e^{(2-2i)t}\begin{pmatrix}1\\1+2i\end{pmatrix}}_{X_2(t)}\quad\text{avec}\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2.$$

Une base des solutions complexes de $(S)$ est $(X_1,X_2)$. Les éléments $X_1$ et $X_2$ sont conjugués, donc pour obtenir les solutions réelles, on les remplace par la partie réelle et la partie imaginaire de $X_1$. Dans ce cas, on a

$$X_1(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}\cos(2t)\\ \cos(2t)+2\sin(2t)\end{pmatrix}+ie^{2t}\begin{pmatrix}\sin(2t)\\ \sin(2t)-2\cos(2t)\end{pmatrix},$$

donc les solutions réelles de $(S)$ sont

$$X(t)=\alpha e^{2t}\begin{pmatrix}\cos(2t)\\ \cos(2t)+2\sin(2t)\end{pmatrix}+\beta e^{2t}\begin{pmatrix}\sin(2t)\\ \sin(2t)-2\cos(2t)\end{pmatrix}.$$

avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

**Exemple 8 :** Résolvons le système différentiel sur $\mathbb{R}$ défini par

$$\left\{\begin{array}{rcl}x'&=&3x-y\\ y'&=&x+y\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\underbrace{\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}}_{X'}=\underbrace{\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}.\qquad(S)$$

La matrice $A$ n'est pas diagonalisable, mais elle est trigonalisable.

$$A=PTP^{-1}\quad\text{avec}\quad T=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad P=\begin{pmatrix}2&1\\2&-1\end{pmatrix}.$$

En posant $Y=P^{-1}X$, on obtient que $Y$ est solution du système différentiel

$$Y'=TY\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{rcl}u'&=&2u+v\\ v'&=&2v\end{array}\right.\quad\text{si}\quad Y=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}.$$

On en déduit que $v(t)=\mu e^{2t}$ avec $\mu\in\mathbb{R}$, puis que $u$ est solution de l'équation différentielle linéaire

$$u'-2u=\mu e^{2t}.$$

Après résolution, on trouve $u(t)=(\lambda+\mu t)e^{2t}$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, donc

$$Y(t)=\begin{pmatrix}(\lambda+\mu t)e^{2t}\\ \mu e^{2t}\end{pmatrix}.$$

En substituant dans $X=PY$, on trouve les solutions du système $(S)$

$$X(t)=(\lambda+\mu t)e^{2t}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\mu e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\quad\text{avec}\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,$$

ce que l'on peut réécrire

$$\left\{\begin{array}{rcl}x(t)&=&2\lambda e^{2t}+\mu e^{2t}(2t+1)\\ y(t)&=&2\lambda e^{2t}+\mu e^{2t}(2t-1)\end{array}\right.\quad\text{avec}\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$