CHAPITRE 3

Déterminants

Jérôme VON BUHREN
http://vonbuhren.free.fr

Lycée Blaise Pascal - TSI

Les déterminants sont des outils très utiles en mathématiques : ils permettent notamment de tester simplement si une matrice est inversible ou si une famille de vecteurs est une base. De plus, nous les utiliserons pour définir une notion importante dans un futur chapitre : le polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

L'objectif principal de ce chapitre est d'étendre la notion de déterminant vue en première année à des matrices de tailles quelconques. Nous généraliserons les propriétés déjà vues et nous en démontrerons de nouvelles afin de calculer efficacement le déterminant. Finalement, nous introduirons le déterminant d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Dans tout le chapitre, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Théorème d'existence et d'unicité du déterminant

Il existe une unique application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, appelée déterminant, vérifiant les propriétés suivantes.

(i) Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes.

(ii) L'échange de deux colonnes multiplie le déterminant par (-1).

(iii) Le déterminant de la matrice identité I_n est 1.

Notation

Le déterminant d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté

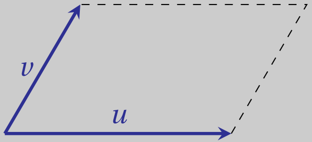
$$\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Remarques 1

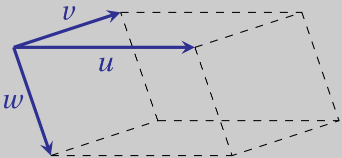
a) Lorsque $n=2$ ou $n=3$, on retrouve le déterminant vu en première année.

b) Si $n=2$ et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, le déterminant de la matrice dont on note les colonnes (u,v) est l'aire algébrique du parallélogramme construit sur u et v.

c) Si $n=3$ et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, le déterminant de la matrice dont on note les colonnes (u,v,w) est le volume algébrique du parallélépipède construit sur u, v et w.



Parallélogramme construit sur u et v



Parallélépipède construit sur u, v et w

Proposition 1

On a les propriétés suivantes.

(i) Si une matrice a une colonne nulle, alors son déterminant est nul.

(ii) Si une matrice a deux colonnes égales, alors son déterminant est nul.

Théorème 1

On a les propriétés suivantes.

(i) On ne change pas le déterminant d'une matrice si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

(ii) Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Remarque 2

On déduit du théorème que pour calculer le déterminant d'une matrice explicite, on peut utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour se ramener à une matrice triangulaire.

Exemple 1

On calcule un déterminant en échelonnant la matrice sur les colonnes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 + C_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_4 \leftarrow C_4 - \frac{2}{3} C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1/3 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 3 \times \frac{1}{3} = 1.$$

Théorème 2

Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) On a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ et $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(ii) La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

(iii) Si A est inversible, alors $\det\left(A^{-1}\right) = \det(A)^{-1}$.

Corollaire 1

Si deux matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors elles ont le même déterminant.

Théorème 3

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det(A) = \det\left(A^{\mathrm{T}}\right)$.

Corollaire 2

Les propriétés du déterminant sur les colonnes sont aussi valable sur les lignes.

Formules de Laplace

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $j \in [\![1, n]\!]$ avec $n \geqslant 2$. On a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

où $A_{i,j} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ est la matrice obtenue en retirant la ligne i et la colonne j à la matrice A.

Exemple 2

En développement par rapport à la première colonne, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-2) - 2 \times 1 + 3 \times 3 = 5.$$

Remarque 3

Le signe du $(-1)^{i+j}$ dans la formule peut se retenir avec la matrice suivante.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots & \pm \\ - & + & - & \ddots & \vdots \\ + & - & \ddots & \ddots & + \\ \vdots & \ddots & \ddots & + & - \\ \pm & \cdots & + & - & + \end{pmatrix}$$

Formules de Laplace

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $i \in [\![1, n]\!]$ avec $n \geqslant 2$. On a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

où $A_{i,j} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ est la matrice obtenue en retirant la ligne i et la colonne j à la matrice A.

Exemple 3

En développement par rapport à la deuxième ligne, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \times 1 + 1 \times 3 - 2 \times (-2) = 5.$$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition (Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base)

Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille de vecteurs de E. Le déterminant de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathscr{B}$, noté $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$, est le déterminant de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$.

Exemple 4

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$, la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ de E et la famille (P_0, P_1, P_2) avec

$$P_0 = X^2 + 1, \quad P_1 = X^2 + X + 1, \quad P_2 = X^2 - 1.$$

La matrice de cette famille dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P_0, P_1, P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que le déterminant de cette famille dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\det_{\mathscr{B}}(P_0, P_1, P_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Théorème 4

Une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E est une base si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$.

Exemple 5

Dans l'exemple précédent, la famille (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition (Déterminant d'un endomorphisme)

Soient $\mathscr{B}$ une base de l'espace vectoriel E et $u \in \mathscr{L}(E)$. Le déterminant de l'endomorphisme u, noté $\det(u)$, est le déterminant de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 4

D'après le corollaire 1, le nombre $\det(u)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ que l'on utilise pour faire le calcul. En effet, si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E, on a avec la formule du changement de base

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \cdot P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \cdot (P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}})^{-1},$$

donc les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u')$ sont semblables.

Exemple 6

On considère l'endomorphisme $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$u(P) = XP''(X) + P(X).$$

Dans la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, la matrice de u est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la déterminant de u est $\det(u) = \det(A) = 1 \times 1 \times 1 = 1$.

Théorème 5

Soit $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) On a $\det(\lambda u) = \lambda^{\dim E} \det(u)$ et $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$.

(ii) L'application u est un automorphisme si et seulement si $\det(u) \neq 0$.

(iii) Si u est un automorphisme, alors $\det\left(u^{-1}\right) = \det(u)^{-1}$.