

Chapitre 3 Déterminants

Exercice 1 : En retranchant la première ligne aux autres, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8.$$

En effectuant des opérations sur les lignes, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12.$$

De même en utilisant la seconde ligne, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 96.$$

En effectuant des opérations sur les lignes, puis sur les colonnes, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & i & i & 1 \\ i & 0 & 1 & -1 \\ i & i & i & 1 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & i & i & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1-i \\ 0 & 1+i & 1+i & 1-i \\ 0 & i & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1-i \\ 1+i & 1+i & 1-i \\ i & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & 2 & -1-i \\ 0 & 1+i & 1-i \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i(1+i) = -1+i.$$

Exercice 2 : En effectuant des opérations sur les lignes, on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}.$$

La première ligne se factorise par $(b-a)$ et la seconde par $(c-a)$, donc

$$\Delta = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a+b \\ 1 & a+c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

En effectuant des opérations sur les lignes, on a

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & \cos b - \cos a & \cos 2b - \cos 2a \\ 0 & \cos c - \cos a & \cos 2c - \cos 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos b - \cos a & \cos 2b - \cos 2a \\ \cos c - \cos a & \cos 2c - \cos 2a \end{vmatrix}.$$

En utilisant la formule d'addition, on a $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, donc

$$D = \begin{vmatrix} \cos b - \cos a & 2(\cos^2 b - \cos^2 a) \\ \cos c - \cos a & 2(\cos^2 c - \cos^2 a) \end{vmatrix}.$$

La première ligne se factorise par $(\cos b - \cos a)$, la seconde par $(\cos c - \cos a)$ et la seconde colonne par 2, donc

$$D = 2(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a) \begin{vmatrix} 1 & (\cos b + \cos a) \\ 1 & (\cos c + \cos a) \end{vmatrix} = 2(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b).$$

Exercice 3 : On commence par additionner toutes les colonnes sur la première, puis on retranche la première ligne aux autres.

$$D = \begin{vmatrix} a+b+2c & c & c & b \\ a+b+2c & a & b & c \\ a+b+2c & b & a & c \\ a+b+2c & c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 0 & a-c & b-c & c-b \\ 0 & b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, puis la dernière ligne, on obtient

$$D = (a + b + 2c)(a - b) \begin{vmatrix} a - c & b - c \\ b - c & a - c \end{vmatrix}.$$

Finalement, en additionnant les deux colonnes sur la première, on obtient

$$D = (a + b + 2c)(a - b) \begin{vmatrix} a + b - 2c & b - c \\ a + 2 - 2c & a - c \end{vmatrix} = (a + b + 2c)(a - b)^2(a + b - 2c).$$

Exercice 4 : Pour M_a , en utilisant la second ligne en pivot, on obtient

$$\det(M_a) = \begin{vmatrix} 0 & a^2 - 1 & -a & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & -a & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 - 1 & -a & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix}.$$

En factorisant la dernière ligne et la seconde colonne par a , puis en effectuant des opérations sur les lignes, on obtient

$$\det(M_a) = a^2 \begin{vmatrix} a^2 - 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} a^2 - 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Finalement, en développant selon la seconde colonne, on trouve

$$\det(M_a) = a^2 \begin{vmatrix} a^2 - 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = a^2(a - 2)(a + 2).$$

Comme M_a est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, on en déduit que M_a est inversible si et seulement si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

Pour N_a , on peut factoriser la troisième ligne par a et la dernière colonne par $a^2 - a$, puis en retranchant la troisième colonne à la seconde on obtient

$$\det(N_a) = a^2(a - 1) \begin{vmatrix} 0 & a & a & 1 \\ 1 & a - 1 & 2a - 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 3a - 1 & 0 \end{vmatrix} = a^2(a - 1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & -a & 2a - 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 - 2a & 3a - 1 & 0 \end{vmatrix},$$

puis en développant selon la troisième ligne, puis la première

$$\det(N_a) = a^2(a - 1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 - 2a & 0 \end{vmatrix} = a^2(a - 1) \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & 1 - 2a \end{vmatrix} = -a^2(a - 1)^2.$$

Comme N_a est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, on en déduit que N_a est inversible si et seulement si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Exercice 5 :

1. On a

$$\Delta_1 = 3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 15.$$

2. En développant Δ_{n+2} selon la première ligne, on a

$$\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

puis en développant selon la première colonne dans le déterminant ci-dessus, on obtient $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.

3. En utilisant la formule précédente, on obtient $\Delta_4 = 31$ et $\Delta_5 = 63$. On peut conjecturer que $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. On démontre $\mathcal{P}_n : \Delta_n = 2^{n+1} - 1$ par récurrence double pour $n \in \mathbb{N}^*$.

• Initialisation : Pour $n = 1$ et $n = 2$, on a

$$\Delta_1 = 3 = 2^{1+1} - 1, \quad \Delta_2 = 7 = 2^{2+1} - 1,$$

donc \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont vraies.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que \mathcal{P}_n et \mathcal{P}_{n+1} sont vraies. On a

$$\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n = 3(2^{n+2} - 1) - 2(2^{n+1} - 1) = 2^{n+3} - 1,$$

donc \mathcal{P}_{n+2} est vraie.

Finalement, on a montré que $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6 : En retranchant chaque colonne à la suivante en commençant par l'avant dernière, on obtient une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients diagonaux sont $s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_2, \dots, s_n - s_{n-1}$, donc

$$D = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \dots (s_n - s_{n-1}).$$

Exercice 7 :

1. On démontre par récurrence pour $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété

$$\mathcal{P}_n : \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \left(\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \leq 1 \right) \Rightarrow |\det(A)| \leq 1.$$

- Initialisation : Pour $n = 1$, la propriété est évidente.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que \mathcal{P}_n est vraie. Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété de l'exercice. En développant le déterminant selon la première colonne, on a

$$|\det(A)| = \left| \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1}) \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_{i,1}| |\det(A_{i,1})|.$$

Chaque matrice $A_{i,1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie l'hypothèse sur les coefficients, donc par hypothèse de récurrence, on a

$$|\det(A)| \leq \sum_{i=1}^n |a_{i,1}| |\det(A_{i,1})| \leq \sum_{i=1}^n |a_{i,1}| = 1.$$

donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Finalement, on a montré \mathcal{P}_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note C_1, \dots, C_n les colonnes de A et

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_i = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

S'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\alpha_i = 0$, alors $C_i = 0$, donc $\det(A) = 0$ et l'inégalité est vérifiée. Sinon on note $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont $\alpha_1^{-1} C_1, \dots, \alpha_n^{-1} C_n$. La matrice M vérifie les hypothèses de la première question, donc

$$\begin{aligned} |\det(M)| \leq 1 &\Leftrightarrow |\det(\alpha_1^{-1} C_1, \dots, \alpha_n^{-1} C_n)| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha_1^{-1} \dots \alpha_n^{-1} |\det(C_1, \dots, C_n)| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow |\det(A)| \leq \alpha_1 \dots \alpha_n, \end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité qu'il fallait démontrer.

Exercice 8 : Avec les propriétés du déterminant, on a

$$\det(M) = \det(M^T) = \det(-M) = (-1)^n \det(M).$$

Comme n est impair, on a $(-1)^n = -1$, donc $\det(M) = -\det(M)$, ce qui implique la relation $\det(M) = 0$. Ainsi, M n'est pas inversible.

Exercice 9 : On note \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^3 . On a

$$\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_t) = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix}.$$

En additionnant toutes les colonnes sur la première, on obtient

$$\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_t) = \begin{vmatrix} t+2 & 1 & 1 \\ t+2 & t & 1 \\ t+2 & 1 & t \end{vmatrix} = (t+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix}.$$

En retranchant la première ligne aux autres, on a

$$\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_t) = (t+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t+2)(t-1)^2.$$

Finalement, \mathcal{F}_t est une base de \mathbb{R}^3 si et seulement si $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_t) \neq 0$, ce qui équivaut à $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

Exercice 10 : On note \mathcal{C} la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On a

$$\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_{a,b,c}) = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ -2a & -2b & -2c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

En retranchant la première colonne aux autres, on a

$$\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_{a,b,c}) = -2 \begin{vmatrix} a^2 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \\ a & b - a & c - a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \\ b - a & c - a \end{vmatrix}.$$

La première colonne se factorise par $(b - a)$ et la seconde par $(c - a)$, donc

$$\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_{a,b,c}) = -2(b - a)(c - a) \begin{vmatrix} a + b & a + c \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(b - a)(c - a)(b - c).$$

Finalement, $\mathcal{F}_{a,b,c}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_{a,b,c}) \neq 0$, ce qui équivaut à a, b et c sont deux à deux distincts.

Exercice 11 : On a

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_t) = \begin{vmatrix} 1+t & t & t & t \\ t & 1+t & t & t \\ t & t & 1+t & t \\ t & t & t & 1+t \end{vmatrix}.$$

En additionnant toutes les colonnes sur la première, on obtient

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_t) = \begin{vmatrix} 1+4t & t & t & t \\ 1+4t & 1+t & t & t \\ 1+4t & t & 1+t & t \\ 1+4t & t & t & 1+t \end{vmatrix} = (1+4t) \begin{vmatrix} 1 & t & t & t \\ 1 & 1+t & t & t \\ 1 & t & 1+t & t \\ 1 & t & t & 1+t \end{vmatrix}.$$

En retranchant la première ligne aux autres, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_t) = (1+4t) \begin{vmatrix} 1 & t & t & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+4t.$$

Finalement, \mathcal{F}_t est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_t) \neq 0$, ce qui équivaut à $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1/4\}$.

Exercice 12 : On note \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^3 . Dans le premier cas, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } \det(u) = -1 \neq 0,$$

donc u est un isomorphisme. Dans le second cas, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } \det(u) = 0,$$

donc u n'est pas un isomorphisme.

Exercice 13 : On note \mathcal{C} la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Dans le premier cas, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } \det(u) = 1 \neq 0,$$

donc u est un isomorphisme. Dans le second cas, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } \det(u) = 0,$$

donc u n'est pas un isomorphisme. Dans le troisième cas, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ donc } \det(u) = 6 \neq 0,$$

donc u est un isomorphisme.

Exercice 14 :

1. Soient $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\varphi(M + \lambda N) = A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = \varphi(M) + \lambda \varphi(N),$$

donc φ est linéaire.

2. Notons $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(E_{11}) &= aE_{11} + cE_{21} & \varphi(E_{12}) &= aE_{12} + cE_{22} \\ \varphi(E_{21}) &= bE_{11} + dE_{21} & \varphi(E_{22}) &= bE_{12} + dE_{22}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

3. En développant selon la première ligne, on a

$$\det(\varphi) = a \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = (ad - bc)^2 = (\det(A))^2.$$

4. On a que φ est un isomorphisme ssi

$$\det(\varphi) \neq 0 \Leftrightarrow (\det(A))^2 \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0,$$

ce qui équivaut à A est inversible.

Exercice 15 : On a $\det(f)^2 = \det(f^2) = \det(-\text{Id}_E) = (-1)^{\dim(E)}$. Comme $\det(f) \in \mathbb{R}$, on a $\det(f)^2 \geq 0$, donc nécessairement $\dim(E)$ est pair.

Exercice 16 :

1. D'après le théorème du rang, on a $\dim(\text{Ker}(u)) = n - 1$. On fixe une base (v_1, \dots, v_{n-1}) de $\text{Ker}(u)$ que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ de E par le théorème de la base incomplète. Par construction, on a

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

2. La matrice de $u + \text{Id}$ dans la base \mathcal{B} est la matrice $M + I_n$. Cette matrice est triangulaire supérieure avec sur la diagonale $(n - 1)$ coefficients 1 et un coefficient $\alpha_n + 1$. Ainsi $\det(u + \text{Id}) = 1 + \alpha_n$. De plus, on a $\alpha_n = \text{Tr}(M) = \text{Tr}(u)$, donc $\det(u + \text{Id}) = 1 + \text{Tr}(u)$.

Exercice 17 :

1. Si (u_1, \dots, u_k) est une base de $\text{Ker}(s - \text{Id})$ et (v_1, \dots, v_r) une base de $\text{Ker}(s + \text{Id})$, alors $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r)$ est une base de E . De plus, comme s est une symétrie, on a $s(u_i) = u_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et $s(v_j) = -v_j$ pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$. En notant, la matrice par bloc, on trouve

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_k & O_{k,r} \\ O_{r,k} & -I_r \end{pmatrix}.$$

2. On en déduit que

$$\det(s) = 1^k \cdot (-1)^r = (-1)^r = (-1)^{\dim(\text{Ker}(s+\text{Id}))}.$$