CHAPITRE 3
Déterminants

I - Déterminant d'une matrice carrée

Exercice 1 : Calculer le déterminant des matrices de $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i & i & 1 \\ i & 0 & 1 & -1 \\ i & i & i & 1 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, calculer sous forme factorisée les déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}.$$

Exercice 3 : Pour $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, calculer sous forme factorisée le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 4 : Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$, les matrices de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ suivantes sont-elles inversibles ?

$$M_a = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}, \quad N_a = \begin{pmatrix} 0 & a & a & a^2-a \\ 1 & a-1 & 2a-1 & a^2-a \\ 0 & a & a & 0 \\ 1 & a & 3a-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le déterminant de taille $n \times n$ suivant.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Calculer Δ_1, Δ_2 et Δ_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.
3. Calculer Δ_4 et Δ_5. Conjecturer une expression pour Δ_n.
4. Démontrer la conjecture précédente.

Exercice 6 : Pour $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} s_1 & \ldots & \ldots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \ldots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 7 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que
$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant 1.$$
Montrer par récurrence sur n que $|\det(A)| \leqslant 1$.
2. En déduire l'inégalité
$$|\det(A)| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right).$$

Exercice 8 : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que si n est un entier impair, alors M n'est pas inversible.

II - Déterminant d'une famille de vecteurs

Exercice 9 : Déterminer les réels $t \in \mathbb{R}$ tels que la famille

$$\mathscr{F}_t = \big((t,1,1),(1,t,1),(1,1,t)\big)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10 : A quelle condition sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, la famille

$$\mathscr{F}_{a,b,c} = \Big((X-a)^2,(X-b)^2,(X-c)^2\Big)$$

est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 11 : Soit E un espace vectoriel admettant une base (v_1,v_2,v_3,v_4) notée $\mathscr{B}$. On note $w = v_1+v_2+v_3+v_4$. Pour quelle valeur de $t \in \mathbb{K}$, la famille

$$\mathscr{F}_t = (v_1+tw, v_2+tw, v_3+tw, v_4+tw)$$

est-elle une base de E?

III - Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 12 : Calculer le déterminant de $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et déterminer si u est un isomorphisme dans chacun des cas suivants.

$$(i)\ \ u(x,y,z) = (x+y+z, x+z, y+z), \quad (ii)\ \ u(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x).$$

Exercice 13 : Calculer le déterminant de $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ et déterminer si u est un isomorphisme dans chacun des cas suivants.

$$(i)\ \ u(P) = P+P', \quad (ii)\ \ u(P) = P(X+1)-P(X), \quad (iii)\ \ u(P) = XP'+P(1).$$

Exercice 14 : On considère une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),$$

ainsi que l'application $\varphi : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = AM$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Exprimer le déterminant de φ en fonction de celui de A.
4. En déduire que φ est un isomorphisme si et seulement si A est inversible.

Exercice 15 : Soit E un espace de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Montrer que s'il existe un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$, alors la dimension de E est paire.

Exercice 16 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E tel que toutes les colonnes de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ sauf la dernière soient nulles.
2. En déduire que $\det(u+\mathrm{Id}) = 1+\mathrm{Tr}(u)$.

Exercice 17 : Soit E un espace de dimension finie et soit $s \in \mathscr{L}(E)$ une symétrie.

1. Écrire la matrice de s dans une base adaptée à $E = \mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id})$.
2. Exprimer le déterminant de s en fonction de la dimension de $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id})$.