CHAPITRE 15

# Courbes et surfaces implicites

Jérôme Von Buhren
http://vonbuhren.free.fr

**Lycée Blaise Pascal - TSI**

Dans le chapitre portant sur les courbes paramétrées, nous avons étudié des objets géométriques définis comme l'image d'une application vectorielle. Dans ce nouveau chapitre, nous allons nous intéresser au point de vue dual : nous allons étudier des objets géométriques définis par une équation.

D'après le cours de première année, nous savons par exemple que toute droite $\mathscr{D}$ du plan admet une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur normal de $\mathscr{D}$ et $c \in \mathbb{R}$. Autrement dit, si on définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = ax + by + c$, alors on a

$$\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\right\}.$$

L'exemple précédent peut s'étendre à d'autres types de courbes que les droites. Par exemple, le cercle $\mathscr{C}$ de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $R > 0$ admet pour équation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0.$$

Dans ce chapitre, nous commencerons par étudier les courbes de $\mathbb{R}^2$ définies par une équation en utilisant notamment les outils du chapitre précédent sur les fonctions à plusieurs variables. Nous nous intéresserons en particulier à la détermination de la tangente en un point d'une telle courbe si cette dernière existe. Dans un second temps, nous adapterons les résultats précédents aux surfaces $\mathbb{R}^3$ définies par une équation.

On fixe une application $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ où $U$ est un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^2$.

**Définition (Courbe implicite)**

La courbe (implicite) d'équation $f(x, y) = 0$ est l'ensemble des points $(x, y) \in U$ vérifiant $f(x, y) = 0$.

**Exemples 1**

a) Si $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une application $g : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, alors $\mathscr{C}$ est une courbe implicite d'équation $y - g(x) = 0$.

b) Les coniques sont des courbes implicites.

**Définition (Point régulier)**

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $f(x,y)=0$. On dit qu'un point $(x_0,y_0)\in\mathscr{C}$ est régulier si

$$\nabla f(x_0,y_0)\neq(0,0).$$

Dans le cas contraire, on dit que le point $(x_0,y_0)\in\mathscr{C}$ est singulier.

## Définition (Tangente)

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $f(x,y)=0$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en un point régulier $(x_0,y_0)\in\mathscr{C}$ est la droite d'équation

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0.$$

## Remarques 1

a) La tangente à $\mathscr{C}$ en un point régulier $(x_0,y_0)\in\mathscr{C}$ est la droite orthogonale au vecteur $\nabla f(x_0,y_0)$ et passant par le point $(x_0,y_0)$.

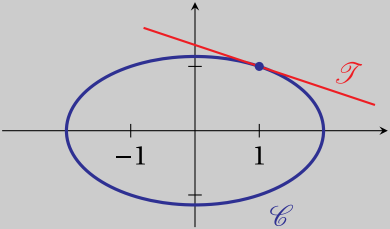
b) Si la courbe $\mathscr{C}$ est paramétrée par une application $\varphi : I\to\mathbb{R}^2$, alors on trouve la même tangente qu'avec la définition vue pour une courbe paramétrée.

## Exemple 2

Soit $\mathscr{C}$ la courbe implicite d'équation $x^2+3y^2-4=0$. La courbe $\mathscr{C}$ admet au point $(1,1)\in\mathscr{C}$ une tangente $\mathscr{T}$, dont une équation est

$$(x-1)\times 2+(y-1)\times 6=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x+6y-8=0.$$

On peut tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{T}$ sur un même graphique.



### Définition (Ligne de niveau)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'ensemble des points $(x, y) \in U$ vérifiant la relation $f(x, y) = \lambda$ est appelé ligne de niveau $\lambda$ de l'application $f$.

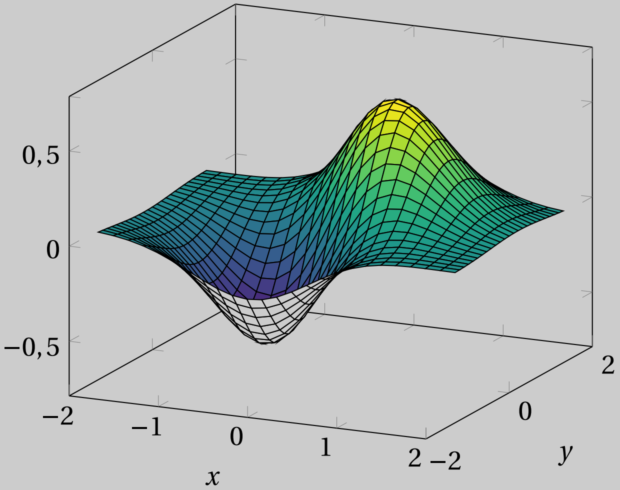
### Exemple 3

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + y)\exp(-x^2 - y^2).$$

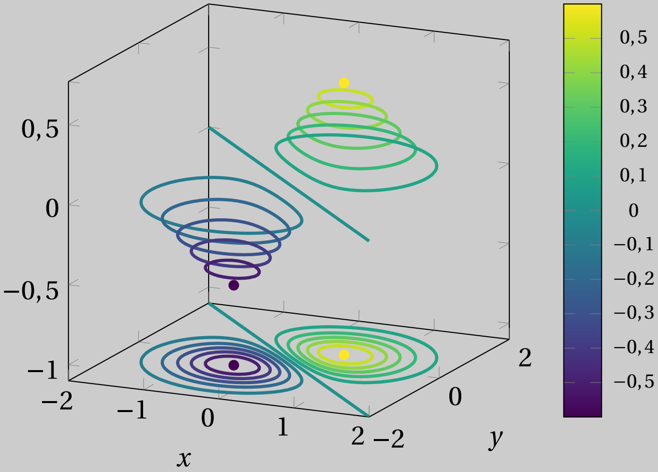
## Exemple 3

On peut tracer la surface représentative de la fonction $f$.



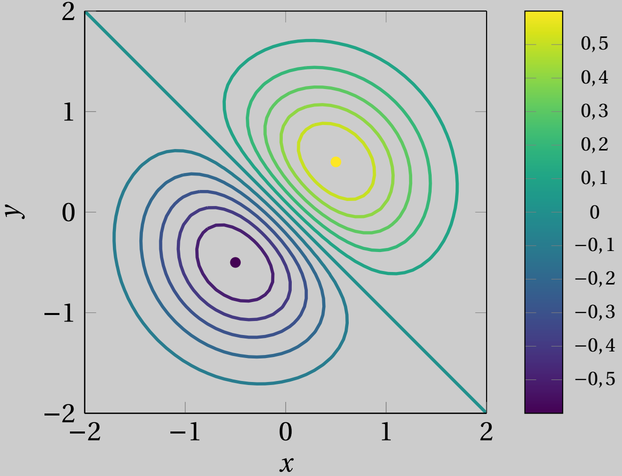
## Exemple 3

On peut tracer les lignes de niveau de $f$ dans l'espace.



## Exemple 3

Finalement, on peut représenter les lignes de niveau de $f$ dans le plan.



## Remarques 2

a) Les lignes de niveau sont utilisées sur les cartes topographiques. L'altitude est constante le long de chacune des lignes sur ces dernières, ce qui permet de représenter le relief.

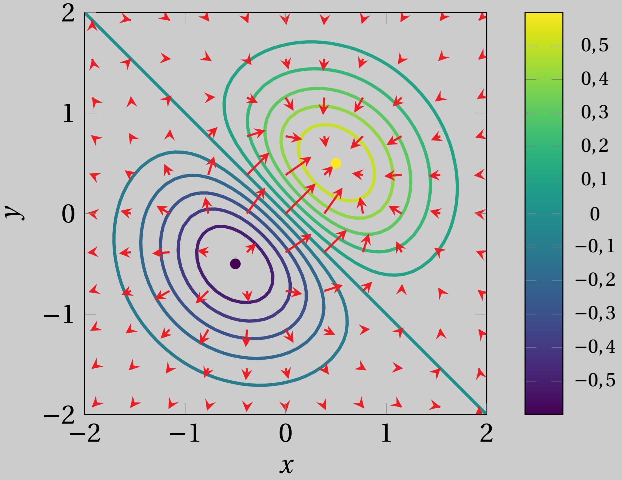
b) On retrouve également les lignes de niveau sur les cartes de pression atmosphérique utilisées en météorologie. La pression est constante le long de chacune des lignes sur ces dernières. Dans ce contexte, les lignes de niveau sont appelées les isobares.

**Proposition 1**

Le gradient de $f$ est orthogonal aux lignes de niveau et il est orienté dans le sens des valeurs croissantes de $f$.

## Exemple 4

On peut placer quelques vecteurs gradients sur les lignes de niveau de l'exemple précédent.



On fixe une application $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ où $U$ est un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^3$.

**Définition (Surface implicite)**

La surface (implicite) d'équation $f(x,y,z) = 0$ est l'ensemble des points $(x,y,z) \in U$ vérifiant $f(x,y,z) = 0$.

**Exemples 5**

a) Si $\mathscr{S}$ est la surface représentative d'une application $g : O \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, alors $\mathscr{S}$ est une surface implicite d'équation $z - g(x,y) = 0$.

b) Les sphères sont des surfaces implicites.

**Définition (Point régulier)**

Soit $\mathscr{S}$ la courbe d'équation $f(x,y,z)=0$. On dit qu'un point $(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{S}$ est régulier si

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0).$$

Dans le cas contraire, on dit que le point $(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{S}$ est singulier.

**Définition (Plan tangent)**

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $f(x,y,z)=0$. Le plan tangent à la surface $\mathscr{S}$ en un point régulier $(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{S}$ est le plan d'équation

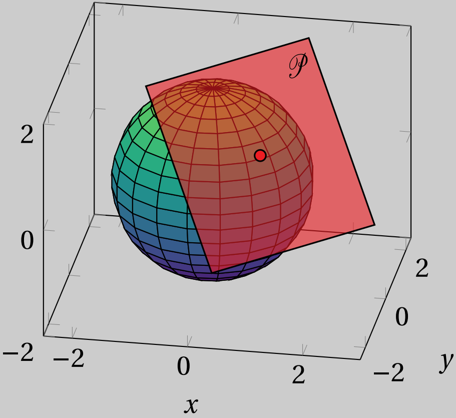
$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=0.$$

**Remarque 3**

Le plan tangent à $\mathscr{S}$ en un point régulier $(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{S}$ est le plan orthogonal au vecteur $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ et passant par le point $(x_0,y_0,z_0)$.

## Exemple 6

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $x^2+y^2+z^2-3=0$. Le plan tangent $\mathscr{P}$ à $\mathscr{S}$ au point $(1,-1,1)$ admet pour équation $x-y+z=3$. On peut tracer $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}$ sur un même graphique.



Dans cette partie, on fixe une application $g : O \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ où $O$ est un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathscr{S}$ la surface représentative de $g$. Par définition $\mathscr{S}$ est la surface d'équation

$$f(x,y,z) = z - g(x,y) = 0.$$

Pour tout $(x_0, y_0) \in O$, on a

$$\nabla f(x_0, y_0, g(x_0, y_0)) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right).$$

En particulier le gradient de $f$ ne s'annule pas, donc tous les points de $\mathscr{S}$ sont réguliers. En appliquant les résultats précédents, on en déduit que la surface $\mathscr{S}$ admet un plan tangent en chaque point $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ dont l'équation est

$$z = (x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) + g(x_0, y_0).$$

Nous allons à présent étudier la position relative entre la surface représentative de $g$ et son plan tangent en un point.

**Définition (Position relative)**

Soit $(x_0, y_0) \in O$.

(i) On dit que la surface $\mathscr{S}$ est localement au-dessus de son plan tangent au point $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ si pour tout $(x, y) \in O$ dans un voisinage de $(x_0, y_0)$, on a

$$g(x,y) \geqslant (x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) + g(x_0, y_0).$$

(ii) On dit que la surface $\mathscr{S}$ est localement en-dessous de son plan tangent au point $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ si pour tout $(x, y) \in O$ dans un voisinage de $(x_0, y_0)$, on a

$$g(x,y) \leqslant (x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) + g(x_0, y_0).$$

**Exemple 7**

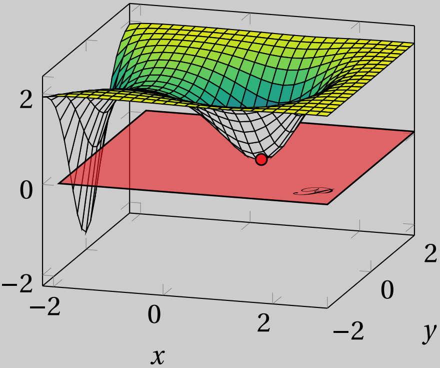
On note $\mathscr{S}$ la surface représentative de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = 2 - \exp\left(-\frac{x^3}{3} + x - y^2\right).$$

Le plan tangent $\mathscr{P}$ à $\mathscr{S}$ au point $(1,0,g(1,0))$ admet pour équation $z = 2 - \exp(2/3)$. On peut tracer $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}$ sur un même graphique.

## Exemple 7

On peut tracer $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}$ sur un même graphique.




On observe sur le graphique que la surface $\mathscr{S}$ est localement (mais pas globalement) au-dessus de son plan tangent au point $(1, 0, g(1, 0))$.

**Définition**

Soit $(x_0, y_0) \in O$. Si le plan tangent à $\mathscr{S}$ en $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ n'est ni localement au-dessus, ni localement en-dessous, on dit que la surface $\mathscr{S}$ traverse son plan tangent au point $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$.

**Exemple 8**

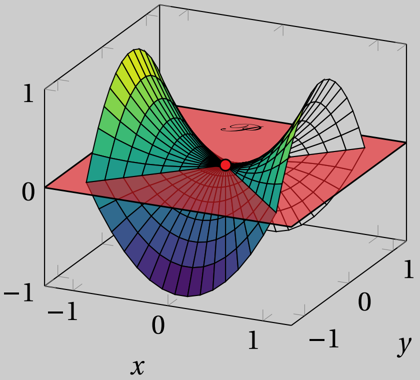
On note $\mathscr{S}$ la surface représentative de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = x^2 - y^2.$$

Le plan tangent $\mathscr{P}$ à $\mathscr{S}$ au point $(0, 0, g(0, 0))$ admet pour équation $z = 0$.

## Exemple 8

On peut tracer $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}$ sur un même graphique.




On observe sur le graphique que la surface $\mathscr{S}$ traverse son plan tangent au point $(0, 0, g(0, 0))$.