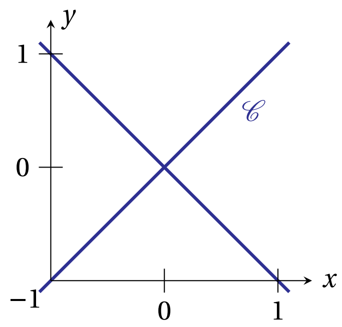
CHAPITRE 15
Courbes et surfaces implicites

Exercice 1 :

1. La courbe $\mathscr{C}$ est la réunion des droites d'équations $y = x$ et $y = -x$.



2. En notant $f(x, y) = x^2 - y^2$, on a $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$. La courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point singulier qui est $(0,0)$. On remarque en effet sur le dessin, que la courbe n'admet pas de tangente au point $(0,0)$.

Exercice 2 :

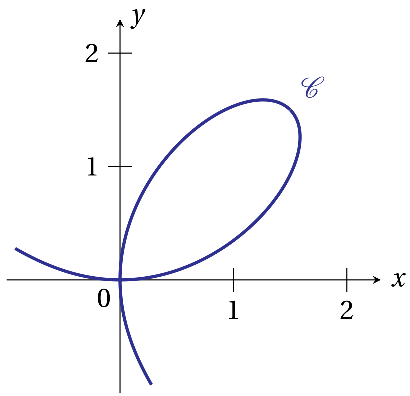
1. En notant $f(x, y) = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1$, on a $\nabla f(x, y) = (2x/a^2, 2y/b^2)$. L'unique point où le gradient est nul est $(0,0)$, mais ce point n'appartient pas à la courbe $\mathscr{C}$. Ainsi, tous les points de la courbe sont réguliers.
2. Par définition, l'équation de la tangente en $(x_0, y_0) \in \mathscr{C}$ est
$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) = 0.$$
Comme $(x_0, y_0) \in \mathscr{C}$, on a $f(x_0, y_0) = 0$, donc l'équation se simplifie en
$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - 1 = 0.$$

Exercice 3 :

1. En notant $f(x, y) = x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1$, on a $\nabla f(x, y) = (2x/a^2, -2y/b^2)$. L'unique point où le gradient est nul est $(0,0)$, mais ce point n'appartient pas à la courbe $\mathscr{C}$. Ainsi, tous les points de la courbe sont réguliers.
2. Par définition, l'équation de la tangente en $(x_0, y_0) \in \mathscr{C}$ est
$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) - \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y - \left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right) = 0.$$
Comme $(x_0, y_0) \in \mathscr{C}$, on a $f(x_0, y_0) = 0$, donc l'équation se simplifie en
$$\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y - 1 = 0.$$

Exercice 4 :

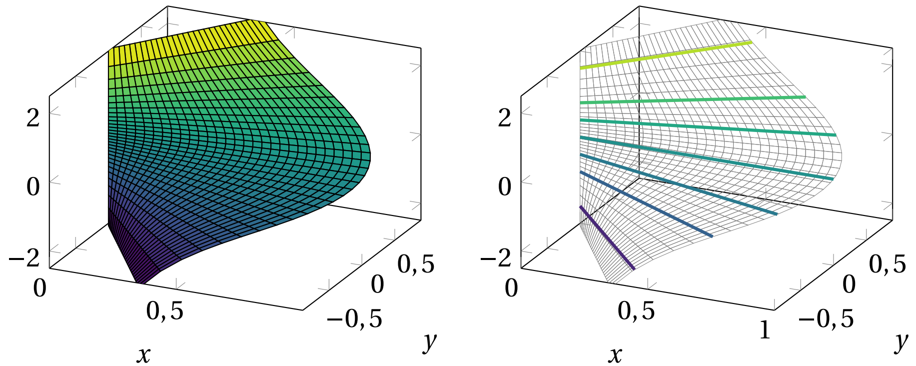
1. En notant $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, on a $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$. Après résolution, la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point singulier qui est $(0,0)$.



2. Par définition, l'équation de la tangente en $(x_0, y_0) \in \mathscr{C} \setminus \{(0,0)\}$ est
$$\begin{aligned}(3x_0^2 - 3y_0)(x - x_0) + (3y_0^2 - 3x_0)(y - y_0) = 0 \\ \Leftrightarrow (x_0^2 - y_0)x + (y_0^2 - x_0)y - (x_0^3 + y_0^3 - 2x_0y_0) = 0.\end{aligned}$$
Comme $(x_0, y_0) \in \mathscr{C}$, on a $f(x_0, y_0) = 0$, donc l'équation se simplifie en
$$(x_0^2 - y_0)x + (y_0^2 - x_0)y - x_0y_0 = 0.$$

Exercice 5 :

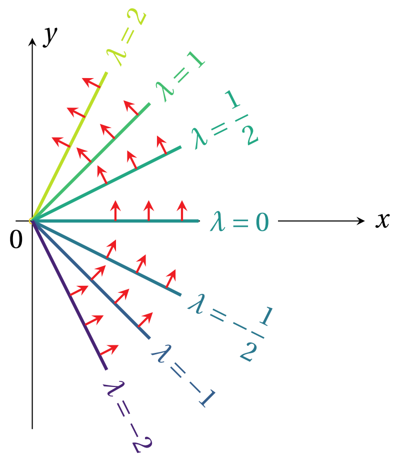
(i) On commence par tracer la surface représentative de la fonction f.



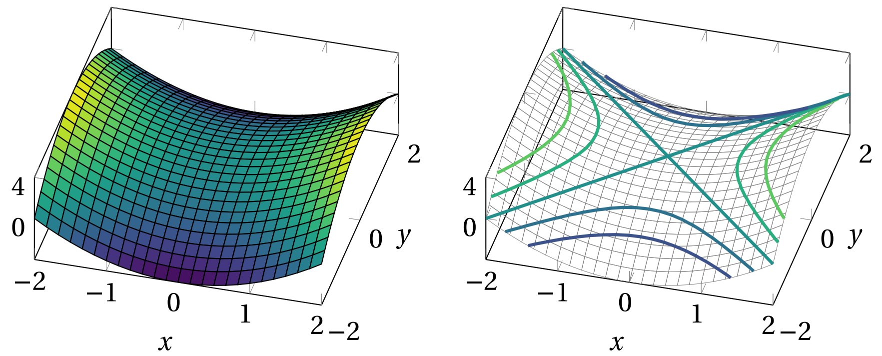
Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors l'équation de la ligne de niveau λ de f est

$$f(x,y) = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{x} = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad y = \lambda x.$$

Il s'agit donc de la droite linéaire d'équation $y = \lambda x$. De plus, on sait que les gradients sont orthogonales aux lignes de niveau et qu'ils vont dans le sens des valeurs croissantes de f. (Sur le dessin ci-dessous, on a juste représenté la direction et le sens des gradients, sans respecter leur norme).



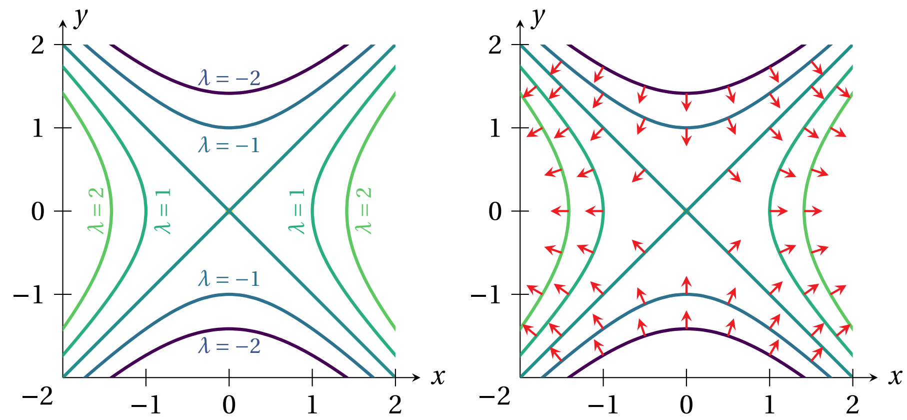
(ii) On commence par tracer la surface représentative de la fonction f.



Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors l'équation de la ligne de niveau λ de f est

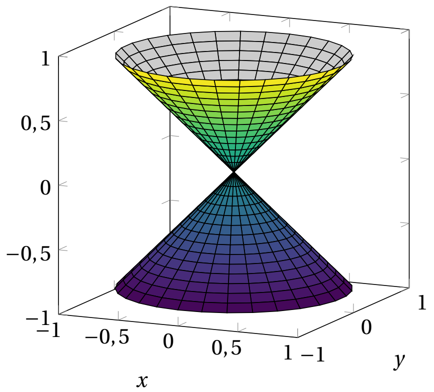
$$f(x,y) = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = \lambda.$$

Si $\lambda \neq 0$, il s'agit d'une hyperbole et si $\lambda = 0$, on obtient la réunion des droites d'équations $y = x$ et $y = -x$. De plus, on sait que les gradients sont orthogonales aux lignes de niveau et qu'ils vont dans le sens des valeurs croissantes de f. (Sur le dessin ci-dessous, on a juste représenté la direction et le sens des gradients, sans respecter leur norme).



Exercice 6 :

1. On commence par tracer la surface $\mathscr{S}$.



En notant $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$, on a $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)$. Ainsi, la surface $\mathscr{S}$ admet un unique point singulier qui est $(0,0,0)$.

2. Par définition, l'équation du plan tangent en $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$ est

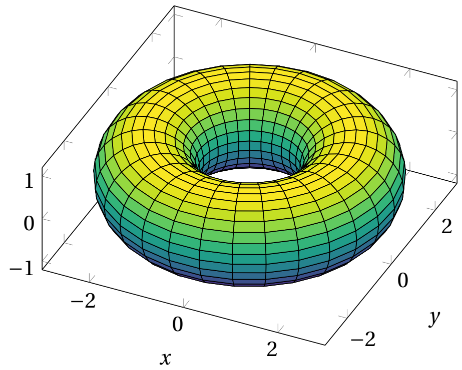
$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-2z_0(z-z_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0x+y_0y-z_0z-(x_0^2+y_0^2-z_0^2) = 0.$$

Comme $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$, on a $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, donc l'équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en (x_0, y_0, z_0) se simplifie en

$$x_0x + y_0y - z_0z = 0.$$

Exercice 7 :

1. On commence par tracer la surface $\mathscr{S}$.



En notant $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2+3)^2 - 16(x^2+y^2)$, on a

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x(x^2+y^2+z^2+3) - 32x \\ 4y(x^2+y^2+z^2+3) - 32y \\ 4z(x^2+y^2+z^2+3) \end{pmatrix}.$$

On considère un point singulier $(x,y,z) \in \mathscr{S}$. La troisième équation implique que $z = 0$. En factorisant dans les deux premières expressions, on est amené à considérer deux cas.

- Si $x^2 + y^2 \neq 5$, on déduit des deux premières équations que $x = y = z = 0$. Cependant $(0,0,0) \notin S$, donc on ne trouve pas de point singulier dans ce cas.
- Si $x^2 + y^2 = 5$, on a

$$f(x,y,z) = (5+0+3)^2 - 16 \cdot 5 = -16 \neq 0,$$

ce qui contredit $(x,y,z) \in \mathscr{S}$, donc on ne trouve pas non plus de point singulier dans ce cas là.

Finalement, la surface $\mathscr{S}$ n'a pas de point singulier.

2. Par définition, l'équation du plan tangent en $(3,0,0) \in \mathscr{S}$ est

$$48(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$$

Exercice 8 :

1. En notant $f(x,y,z) = z^3 - xy$, on a $\nabla f(x,y,z) = (-y,-x,3z^2)$, donc la surface $\mathscr{S}$ admet un unique point singulier qui est $(0,0,0)$.
2. Par définition, l'équation de la tangente en $(x_0,y_0,z_0) \in \mathscr{S} \setminus \{(0,0,0)\}$ est

$$-y_0(x-x_0) - x_0(y-y_0) + 3z_0^2(z-z_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -y_0x - x_0y + 3z_0^2z - +2x_0y_03z_0^3 = 0.$$

Comme $(x_0,y_0,z_0) \in \mathscr{S}$, on a $f(x_0,y_0,z_0) = 0$, donc l'équation se simplifie en

$$-y_0x - x_0y + 3z_0^2z - x_0y_0 = 0.$$

D'autre part, une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 3t \\ z & = & -1+t. \end{array} \right.$$

Si $\mathscr{D}$ est inclus dans le plan tangent à $\mathscr{S}$ en (x_0,y_0,z_0), on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ la relation

$$-2y_0 - 3tx_0 + 3z_0^2(t-1) - x_0y_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t(3z_0^2 - 3x_0) - (2y_0 + 3z_0^2 + x_0y_0) = 0.$$

On en obtient ainsi le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_0^3 & = & x_0y_0 \\ z_0^2 & = & x_0 \\ 2y_0 + 3z_0^2 + x_0y_0 & = & 0. \end{array} \right.$$

En résolvant ce système avec $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, on en déduit que les solutions du problème sont les plans tangents à $\mathscr{S}$ en $(1,-1,-1)$ et en $(4,-2,-2)$.

Exercice 9 :

1. Par définition, l'équation du plan tangent en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ est

$$z = 2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) + f(x_0,y_0) \quad \Leftrightarrow \quad z = 2x_0x + 2y_0y - x_0^2 - y_0^2.$$

2. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x,y) - (2x_0x + 2y_0y - x_0^2 - y_0^2) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$$

qui est positif, donc la surface est au-dessus de son plan tangent.

Exercice 10 :

1. Par définition, l'équation du plan tangent en $(0,0,0)$ est

$$z = 0 \times x + 1 \times y + 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = y.$$

2. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x,y) - y = \frac{-yx^2}{1+x^2},$$

qui n'est pas de signe constant quand (x,y) est proche de $(0,0)$. Ainsi la surface $\mathscr{S}$ traverse son plan tangent en $(0,0,0)$.

Exercice 11 :

1. Par définition, l'équation du plan tangent en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est

$$z = \frac{x - x_0}{x_0} - \frac{y - y_0}{y_0} + \ln(x_0) - \ln(y_0) \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{x}{x_0} - \frac{y}{y_0} + \ln(x_0) - \ln(y_0).$$

2. On écrit $x = x_0 + h$ et $y = y_0 + k$. On a alors

$$\begin{aligned} f(x,y) - \left(\frac{x}{x_0} - \frac{y}{y_0} + \ln(x_0) - \ln(y_0)\right) \\ &= \ln(x_0 + h) - \ln(y_0 + k) - \left(\frac{x_0 + h}{x_0} - \frac{y_0 + k}{y_0} + \ln(x_0) - \ln(y_0)\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right) - \ln\left(1 + \frac{k}{y_0}\right) - \frac{h}{x_0} + \frac{k}{y_0} \\ &= -\frac{h^2}{2x_0^2} + \frac{k^2}{2y_0^2} + o(h^2) + o(k^2). \end{aligned}$$

Le signe de l'expression ci-dessus au voisinage de $(0,0)$ est le signe de

$$-\frac{h^2}{2x_0^2} + \frac{k^2}{2y_0^2},$$

donc elle n'est pas de signe constant au voisinage de $(0,0)$. On en déduit que la surface $\mathscr{S}$ traverse son plan tangent en tout point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.