

CHAPITRE 15

Courbes et surfaces implicites

I - Courbes implicites

Exercice 1 : Soit \mathcal{C} la courbe de \mathbb{R}^2 d'équation $x^2 - y^2 = 0$.

1. Tracer la courbe \mathcal{C} .
2. Déterminer les points singuliers de \mathcal{C} .

Exercice 2 : Soient $a, b > 0$. Soit \mathcal{C} l'ellipse de \mathbb{R}^2 d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1. Déterminer les points réguliers de \mathcal{C} .
2. Donner en ces points une équation de la tangente à \mathcal{C} .

Exercice 3 : Soient $a, b > 0$. Soit \mathcal{C} l'hyperbole de \mathbb{R}^2 d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1. Déterminer les points réguliers de \mathcal{C} .
2. Donner en ces points une équation de la tangente à \mathcal{C} .

Exercice 4 (Folium de Descartes) : Soit \mathcal{C} la courbe de \mathbb{R}^2 d'équation

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

1. Déterminer les points réguliers de \mathcal{C} .
2. Donner en ces points une équation de la tangente à \mathcal{C} .

Exercice 5 : Tracer les lignes de niveau et les gradients des applications suivantes.

$$(i) \quad f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (ii) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{y}{x} \quad (x, y) \mapsto x^2 - y^2.$$

II - Surfaces implicites

Exercice 6 (Cône) : Soit \mathcal{S} la surface de \mathbb{R}^3 d'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

1. Déterminer les points réguliers de \mathcal{S} .
2. Donner en ces points une équation du plan tangent à \mathcal{S} .

Exercice 7 (Tore) : Soit \mathcal{S} la surface de \mathbb{R}^3 d'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0.$$

1. Déterminer les points réguliers de \mathcal{S} .
2. Donner une équation du plan tangent à \mathcal{S} en $(3, 0, 0)$.

Exercice 8 : Soit \mathcal{S} la surface de \mathbb{R}^3 d'équation $z^3 = xy$.

1. Déterminer les points réguliers de \mathcal{S} .
2. Déterminer les plans tangents à \mathcal{S} contenant la droite \mathcal{D} d'équation

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 3z - 3 = 0. \end{cases}$$

Exercice 9 : Soit \mathcal{S} le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

On fixe un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer une équation du plan tangent à \mathcal{S} en $M = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
2. Déterminer la position locale de \mathcal{S} par rapport à son plan tangent en M .

Exercice 10 : Soit \mathcal{S} le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{y}{1 + x^2}.$$

1. Déterminer une équation du plan tangent à \mathcal{S} en $O = (0, 0, 0)$.
2. Déterminer la position locale de \mathcal{S} par rapport à son plan tangent en O .

Exercice 11 : Soit \mathcal{S} le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \ln(x) - \ln(y).$$

On fixe un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer une équation du plan tangent à \mathcal{S} en $M = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
2. Déterminer la position locale de \mathcal{S} par rapport à son plan tangent en M .