CHAPITRE 1

Compléments d'algèbre linéaire

Jérôme VON BUHREN

<http://vonbuhren.free.fr>

Lycée Blaise Pascal - TSI

L'algèbre linéaire est omniprésente dans les différentes disciplines scientifiques, notamment par l'utilisation des matrices et de leurs propriétés. De plus, la notion d'espace vectoriel a par exemple un rôle central en mécanique quantique et dans la théorie des codes utilisée dans les télécommunications.

L'objectif de ce chapitre est principalement d'introduire quelques nouvelles notions en algèbre linéaire que nous utiliserons dans les chapitres suivants.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$. On fixe également un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

Rappelons qu'une combinaison linéaire de vecteurs de E ne fait intervenir qu'un nombre fini de vecteurs de E et de scalaires de $\mathbb{K}$.

Définition (Famille libre et famille liée)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E .

- (i) La famille $\mathcal{F}$ est libre si la seule combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$ égale au vecteur nul 0_E est celle dont tous les coefficients sont nuls.
- (ii) La famille $\mathcal{F}$ est liée si elle n'est pas libre.

Remarques 1

- a) On peut reformuler la définition précédente. Une famille $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est libre si et seulement si pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tous indices $i_1, \dots, i_r \in I$ deux à deux distincts, on a

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r, \quad \left(\alpha_1 v_{i_1} + \dots + \alpha_r v_{i_r} = 0_E \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0 \right).$$

- b) Une famille $\mathcal{F}$ est liée si et seulement si un vecteur de la famille $\mathcal{F}$ s'écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.

Exemples 1

- a) La famille $(X^{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.
- b) La famille $(P_a)_{a \in \mathbb{R}}$ où $P_a = X + a$ est une famille liée de $\mathbb{K}[X]$. En effet, on a la relation $P_2 - 2P_1 + P_0 = 0$.

Rappelons qu'une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ est dite échelonnée en degré si les polynômes de la famille sont de degrés deux à deux distincts.

Proposition 1

Toutes famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ échelonnée en degré est libre.

Exemple 2

La famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ où $P_k = X^{2k} + X^k + 1$ est libre.

Définition (Famille génératrice)

Une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est génératrice si tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$.

Exemple 3

La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

Définition (Base)

Une famille de vecteurs de E est une base si elle est libre et génératrice.

Exemple 4

La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. On l'appelle base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 2

Une famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 5

La famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ où $P_k = \sum_{i=0}^k X^i$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Dans cette sous-partie, on fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ de E .

Définition (Somme de sous-espaces vectoriels)

La somme des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ de E , noté $F_1 + \dots + F_p$ est le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F_1 + \dots + F_p = \{v_1 + \dots + v_p \in E \mid \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, v_i \in F_i\}.$$

Remarque 2

La définition ci-dessus est la généralisation de celle vue en première année pour la somme de deux sous-espaces vectoriels.

Définition (Somme directe de sous-espaces vectoriels)

On dit que la somme des sous-espaces vectoriels $F = F_1 + \dots + F_p$ est directe si tout élément de F se décompose de manière unique selon $(F_1, \dots, F_p)$, i.e.

$$\forall v \in F, \quad \exists!(v_1, \dots, v_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \quad v = v_1 + \dots + v_p.$$

Dans ce cas, on note $F = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.

Exemple 6

Trois droites vectorielles dans $\mathbb{R}^3$ sont en somme directe si et seulement si elles ne sont pas coplanaires.

Proposition 3

La somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe si et seulement si pour tout élément $(v_1, \dots, v_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$, on a

$$v_1 + \dots + v_p = 0_E \quad \Rightarrow \quad v_1 = \dots = v_p = 0_E.$$

Remarque 3

La condition dans la proposition précédente signifie que le vecteur nul 0_E se décompose de manière unique selon $(F_1, \dots, F_p)$.

Théorème 1

Si $\mathcal{B}_k$ est une base de F_k pour chaque $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, alors

$$F_1 + \cdots + F_p = \text{Vect}(\underbrace{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p}_{\mathcal{B}}).$$

De plus, la somme est directe si et seulement si la famille $\mathcal{B}$ est libre. Dans ce cas, on dit que $\mathcal{B}$ est une base adaptée à la somme directe $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Remarque 4

Si E est de dimension finie et si la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe, on en déduit que

$$\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_p) = \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_p).$$

On suppose dans cette sous-partie que E est de **dimension finie** $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition (Hyperplan)

Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

Exemples 7

- a) Si $\dim E = 2$, les hyperplans de E sont les droites vectorielles.
- b) Si $\dim E = 3$, les hyperplans de E sont les plans vectoriels.

Théorème de caractérisation des hyperplans

Soit F un sous-espace vectoriel de E . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) Le sous-espace vectoriel F est un hyperplan de E .
- (ii) Le sous-espace vectoriel F admet une droite vectorielle en supplémentaire.
- (iii) Il existe une application linéaire non nulle $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $F = \text{Ker}(\varphi)$.

Remarque 5

On en déduit que tout hyperplan de $E = \mathbb{K}^n$ admet une équation de la forme $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ où $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ est non nul.

Définition (Sous-espace vectoriel stable)

Un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$, i.e.

$$\forall v \in F, \quad u(v) \in F.$$

Exemples 8

- Les sous-espaces vectoriels $\{0_E\}$ et E sont stables pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$.
- Les sous-espaces vectoriels stables d'une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\pi/2$ sont $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et $\mathbb{R}^2$.
- Les sous-espaces vectoriels stables d'une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'angle $\pi/2$ sont $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, l'axe de la rotation D , le plan vectoriel orthogonal à D et $\mathbb{R}^3$.

Exemples 8

d) On considère l'endomorphisme $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad u(x, y, z) = (7x + 4y + 4z, 4x - 8y + z, -4x - y + 8z).$$

Alors les sous-espaces vectoriels

$$D = \text{Vect}\left((1, -4, 0)\right) \quad \text{et} \quad H = \text{Vect}\left((0, 0, 1), (4, 1, 0)\right)$$

sont stables par u . En effet, on a

$$u(D) = \text{Vect}\left(u(1, -4, 0)\right) = \text{Vect}\left(\underbrace{(-9, 36, 0)}_{\in D}\right) \subset D,$$

$$u(H) = \text{Vect}\left(u(0, 0, 1), u(4, 1, 0)\right) = \text{Vect}\left(\underbrace{(4, 1, 8)}_{\in H}, \underbrace{(32, 8, -17)}_{\in H}\right) \subset H.$$

Remarque 6

Si F est un sous-espace stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, alors la restriction $u|_F$ de u à F est un endomorphisme de F .

Proposition 4

On suppose que l'espace vectoriel E est de dimension finie et on considère des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ de E tels que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.

Si $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une base adaptée à la somme directe précédente et si les sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ sont stables par un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, alors on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix} \quad \text{où } A_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u|_{F_i}).$$

Exemple 9

On reprend l'exemple précédent. On considère la base

$$\mathcal{B} = \left(\underbrace{(1, -4, 0)}_{\text{Base de } D}, \underbrace{(0, 0, 1), (4, 1, 0)}_{\text{Base de } H} \right)$$

qui est adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = D \oplus H$. La matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -17 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Définition (Trace d'une matrice carrée)

La trace d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée $\text{Tr}(A)$, est la somme de ses coefficients diagonaux, i.e.

$$\text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,k}.$$

Exemple 10

Pour $n = 2$, on a $\text{Tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$.

Proposition 5

La trace vérifie les propriétés suivantes.

- (i) L'application $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une application linéaire.
- (ii) Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Rappelons que deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Corollaire 1

Si deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors elles ont la même trace.

On fixe un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

Définition (Trace d'un endomorphisme)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. La trace de u , notée $\text{Tr}(u)$, est la trace de la matrice représentant u dans une base $\mathcal{B}$ de E .

Remarque 7

Le corollaire précédent nous assure que le nombre $\text{Tr}(u)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ de E que l'on a choisi pour le calculer.

Exemple 11

On considère l'endomorphisme $u: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$u(P) = XP'(X) + P(X).$$

Dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, la matrice de u est

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la trace de u est $\text{Tr}(u) = \text{Tr}(A) = 1 + 1 + 1 = 3$.

Définition (Transposée d'une matrice)

La matrice transposée (ou la transposée) d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice notée $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A .

Exemple 12

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \text{ alors } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Remarques 8

a) En notant $B = A^T$, la définition se traduit sur les coefficients par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket, \quad b_{i,j} = a_{j,i}.$$

b) La transposée de la matrice A^T est A , i.e. $(A^T)^T = A$.

Proposition 6

On a les propriétés suivantes.

(i) La transposition est linéaire :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})^2, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad (\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T.$$

(ii) Pour tout $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $(AB)^T = B^T A^T$.

(iii) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors la matrice A^T est inversible et on a la relation $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Définition (Matrice symétrique ou antisymétrique)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- (i) On dit que M est symétrique si $M^T = M$.
- (ii) On dit que M est antisymétrique si $M^T = -M$.

Exemples 13

a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est symétrique.

b) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarque 9

Les coefficients de la diagonale principale d'une matrice antisymétrique sont nuls.