CHAPITRE 1
Compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1 : On vérifie les points de la définition.

- On a $F \subset \mathbb{R}^3$ par définition de F.
- Le vecteur $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$ car $0 + 2 \times 0 = 0$.
- Soient $u = (x,y,z) \in F$, $u' = (x',y',z') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$u + \lambda u' = (x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')$$

et

$$(x+\lambda x') + 2(y+\lambda y') = (x+2y) + \lambda(x'+2y') = 0 + \lambda \times 0 = 0,$$

donc $u + \lambda u' \in F$.

On a donc montré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De plus, on a

$$x + 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -2y \\ y &=& y \\ z &=& z, \end{array} \right.$$

donc une base de F est $\big((-2,1,0),(0,0,1)\big)$.

Exercice 2 : On vérifie les points de la définition.

- On a $F \subset \mathbb{R}^3$ par définition de F.
- Le vecteur $0_{\mathbb{R}^4} \in F$ car $0+0+0 = 0+0+0 = 0$.
- Soient $u = (x,y,z,t) \in F$, $u' = (x',y',z',t') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$u + \lambda u' = (x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z', t+\lambda t')$$

et

$$\begin{aligned} (x+\lambda x') + (y+\lambda y') + (t+\lambda t') &= (x+y+z) + \lambda(x'+y'+z') = 0 + \lambda \times 0 = 0, \\ (y+\lambda y') + (z+\lambda z') + (t+\lambda t') &= (x+y+z) + \lambda(x'+y'+z') = 0 + \lambda \times 0 = 0, \end{aligned}$$

donc $u + \lambda u' \in F$.

On a donc montré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. De plus, on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0 \\ y+z+t &=& 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& -z-t \\ z &=& z \\ t &=& t, \end{array} \right.$$

donc une base de F est $\big((0,-1,1,0),(1,-1,0,1)\big)$.

Exercice 3 : On vérifie les points de la définition.

- On a $F \subset \mathbb{R}[X]$ par définition de F.
- Le vecteur $0_{\mathbb{R}[X]} \in F$ car $\int_{-1}^{1} 0 \, \mathrm{d}t = 0$.
- Soient $P, Q \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_{-1}^{1} (P+\lambda Q)(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \lambda \times 0 = 0,$$

donc $P + \lambda Q \in F$.

On a donc montré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 : On montre que la famille $\mathscr{F}$ est libre. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant

$$\begin{aligned} & a(1,-1,0,1) + b(1,1,1,1) + c(1,0,-1,-1) + d(0,1,1,1) = (0,0,0,0) \\ \Leftrightarrow \quad & (a+b+c, -a+b+d, b-c+d, a+b-c+d) = (0,0,0,0). \end{aligned}$$

On obtient ainsi le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c &=& 0 \\ -a+b+d &=& 0 \\ b-c+d &=& 0 \\ a+b-c+d &=& 0. \end{array} \right.$$

En appliquant le pivot de Gauss, on obtient $a = b = c = d = 0$, donc la famille $\mathscr{F}$ est libre. Comme $\mathscr{F}$ est une famille libre de cardinal 4 dans $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4, on en déduit que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5 : La famille $\mathscr{F}_a$ est une base si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$$

est inversible. Le déterminant de cette matrice est $a-2$. Comme la matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, on conclut que $\mathscr{F}_a$ est une base si et seulement si $a \neq 2$.

Exercice 6 : On montre que que la famille $\mathscr{F}$ est libre. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{aligned} &aX(X-1)+bX(X-2)+c(X-1)(X-2)=0 \\ &\qquad \Leftrightarrow \quad (a+b+c)X^2-(a+2b+3c)X+2c=0. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c & = & 0 \\ a+2b+3c & = & 0 \\ 2c & = & 0. \end{array} \right.$$

En appliquant le pivot de Gauss, on conclut que $a=b=c=0$, donc la famille $\mathscr{F}$ est libre. Comme $\mathscr{F}$ est une famille libre de cardinal 3 dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3, on en déduit que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Notons $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ les coordonnées du polynôme $1 \in \mathbb{R}_2[X]$ dans la base $\mathscr{F}$. On a

$$\begin{aligned} &1 = aX(X-1)+bX(X-2)+c(X-1)(X-2) \\ &\qquad \Leftrightarrow \quad (a+b+c)X^2-(a+2b+3c)X+2c=1. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on obtient ainsi le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c & = & 0 \\ a+2b+3c & = & 0 \\ 2c & = & 1. \end{array} \right.$$

En appliquant le pivot de Gauss, on conclut que $(a,b,c) = (1/2,-1,1/2)$.

Exercice 7 :

1. Soient $u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $u'=(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(u+\lambda u') &= f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z') \\ &= \big((x+\lambda x')+(y+\lambda y')+(z+\lambda z'), (x+\lambda x')-(y+\lambda y')-(z+\lambda z')\big) \\ &= (x+y+z, x-y-z)+\lambda(x'+y'+z', x'-y'-z') \\ &= f(x,y,z)+\lambda f(x',y',z') = f(u)+\lambda f(u'). \end{aligned}$$

   On conclut f est une application linéaire.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x,y,z) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x-y-z & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -z \\ z & = & z, \end{array} \right. \end{aligned}$$

   donc $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}(0,1,-1)$. Pour finir, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}\big(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\big) \\ &= \operatorname{Vect}\big((1,1),(1,-1),(1,-1)\big) = \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Exercice 8 :

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)(0)+(P+\lambda Q)(1) \\ &= (P(0)+P(1))+\lambda(Q(0)+Q(1)) \\ &= f(P)+\lambda f(Q). \end{aligned}$$

   On conclut que f est une application linéaire.

2. Pour le noyau de f, si on écrit $P = aX^2 + bX + c$, on a

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(P) = 0 \\ &\Leftrightarrow a + b + 2c = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a &=& -b-2c \\ b &=& b \\ c &=& c \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad (a,b,c) \in \mathrm{Vect}\big((-1,1,0),(-2,0,1)\big), \end{aligned}$$

donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(X - X^2, 1 - 2X^2)$. Pour finir, on a

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(1), f(X), f(X^2)\big) = \mathrm{Vect}\big(2,1,1\big) = \mathbb{R}.$$

Exercice 9 :

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q) + (1-X)(P+\lambda Q)' \\ &= (P + (1-X)P') + \lambda(Q + (1-X)Q') \\ &= f(P) + \lambda f(Q). \end{aligned}$$

On conclut que f est une application linéaire.

2. Pour le noyau de f, si on écrit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on a

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(P) = 0 \\ &\Leftrightarrow aX^3 + bX^2 + cX + d + (1-X)(3aX^2 + 2bX + c) = 0 \\ &\Leftrightarrow -2aX^3 + (3a-b)X^2 + 2bX + (c+d) = 0 \\ &\Leftrightarrow -2aX^3 + (3a-b)X^2 + 2bX + (c+d) = 0. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a &=& 0 \\ b &=& 0 \\ c &=& -d \\ d &=& d \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad (a,b,c,d) \in \mathrm{Vect}\big((0,0,-1,1)\big), \end{aligned}$$

donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1-X)$. Pour finir, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\big(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)\big) \\ &= \mathrm{Vect}\big(1, 1, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3\big) \\ &= \mathrm{Vect}\big(1, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3\big). \end{aligned}$$

3. D'après un théorème du cours, on a

$$\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\underbrace{1-X, 1, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3}_{\mathscr{F}}).$$

La famille $\mathscr{F}$ est échelonnée en degré, donc elle est libre. De plus, on a la relation $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim \mathbb{R}_3[X] = 4$, donc la famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Finalement, on conclut que $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ par un résultat du cours.

Exercice 10 : En utilisant le pivot de Gauss, les inverses sont

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 : On peut écrire $M = \mathrm{I}_3 + N$ avec

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice N vérifie $N^3 = 0$ et commute avec I_3. En utilisant le binôme de Newton, on obtient

$$\begin{aligned} M^n = (\mathrm{I}_3 + N)^3 &= \mathrm{I}_3^n N^0 + n\mathrm{I}_3^{n-1} N + \binom{n}{2} \mathrm{I}_3^{n-2} N^2 \\ &= \mathrm{I}_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 12 : Pour la première matrice, on trouve $\mathrm{rang}(M) = 2$ et

$$\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}\right),\quad \mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right).$$

Pour la seconde matrice, on trouve $\mathrm{rang}(M) = 1$ et

$$\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right),\quad \mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Pour la troisième matrice, on trouve $\mathrm{rang}(M) = 2$ et

$$\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right),\quad \mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}\right).$$

Exercice 13 : En appliquant le pivot de Gauss, on trouve que le rang de la matrice est 1 si $a = \pm 1$ et 4 dans les autres cas.

Exercice 14 : Avec la définition, on trouve

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 15 :

1. Montrons que u est linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} u(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q) + (P+\lambda Q)'(X+1) \\ &= (P + P'(X+1)) + \lambda(Q + Q'(X+1)) \\ &= u(P) + \lambda u(Q). \end{aligned}$$

   On en déduit que u est linéaire.

2. En appliquant la définition, on trouve

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&1&2&6\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

3. La matrice est de rang 4, donc elle est inversible. On en déduit que u est un isomorphisme.

4. En résolvant le système, on a

$$\mathrm{Ker}(M - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right).$$

   On en déduit que

$$\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(1).$$

5. En prenant les colonnes de la matrice $M - \mathrm{I}_4$, on a

$$\mathrm{Im}(M - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\\3\\0\end{pmatrix}\right).$$

   On en déduit que

$$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(1, 2+2X, 3+6X+3X^2).$$

Exercice 16 :

1. Avec la définition, on trouve

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix}1&-2\\1&4\end{pmatrix}.$$

2. On a
$$\begin{aligned} u(2,-1) &= (4,-2) = 2\cdot(2,-1)+0\cdot(1,-1),\\ u(1,-1) &= (3,-3) = 0\cdot(2,-1)+3\cdot(1,-1),\end{aligned}$$
donc par définition, on en déduit
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

3. D'après la formule du changement de base, on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u^n) = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}\cdot\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^n)\cdot P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}.$$
De plus, on a
$$P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\quad P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$
ainsi que
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^n) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)^n = \begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}.$$
On trouve finalement
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u^n) = \begin{pmatrix}2^{n+1}-3^n & 2^{n+1}-2\cdot 3^n\\ 3^n-2^n & 2\cdot 3^n-2^n\end{pmatrix},$$
donc
$$u^n(x,y) = \left((2^{n+1}-3^n)x+(2^{n+1}-2\cdot3^n)y,(3^n-2^n)x+(2\cdot3^n-2^n)y\right).$$

Exercice 17 :

1. La matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$ est
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$
Le déterminant de cette matrice est non nul, donc elle est inversible. On en déduit que $\mathscr{B}'$ est une base de E.

2. On a
$$\begin{aligned} f(u) &= f(i+k) = f(i)+f(k) = (i-j)+(j+k) = i+k = u\\ f(v) &= f(i+j) = f(i)+f(j) = (i-j)+(i+2j+k) = 2i+j+k = u+v\\ f(w) &= f(i+j+k) = f(i)+f(j)+f(k) = 2i+2j+2k = 2w.\end{aligned}$$
On obtient donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

3. En utilisant la formule du changement de base, on a
$$A^n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^n) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\cdot\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u^n)\cdot P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}.$$
De plus, on a
$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$
ainsi que
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u^n) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)^n = \begin{pmatrix}1 & n & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}.$$
On trouve finalement
$$A^n = \begin{pmatrix}n+2-2^n & 2^n-1 & 2^n-n-1\\ 1-2^n & 2^n & 2^n-1\\ n+1-2^n & 2^n-1 & 2^n-n\end{pmatrix}.$$

Exercice 18 : Soient $(n_1,\dots,n_p)\in\mathbb{N}^p$ avec $n_1<\dots<n_p$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p$ tel que
$$\begin{aligned}\lambda_1 f_{n_1}+\dots+\lambda_p f_{n_p} = 0 \quad&\Leftrightarrow\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad \lambda_1 x^{n_1}\mathrm{e}^x+\dots+\lambda_p x^{n_p}\mathrm{e}^x = 0.\\ &\Leftrightarrow\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad \lambda_1 x^{n_1}+\dots+\lambda_p x^{n_p} = 0.\end{aligned}$$
On en déduit que le polynôme $\lambda_1 X^{n_1}+\dots+\lambda_p X^{n_p}$ admet une infinité de racines, donc il est nul. Ainsi, on a $\lambda_1=\dots=\lambda_p=0$, donc la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

Exercice 19 : Soient $(n_1,\dots,n_p)\in\mathbb{N}^p$ avec $n_1<\dots<n_p$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p$ tel que

$$\lambda_1 f_{n_1}+\dots+\lambda_p f_{n_p}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad \lambda_1 e^{n_1 x}+\dots+\lambda_p e^{n_p x}=0.$$

En posant $t=e^x$, on a

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad \lambda_1 t^{n_1}+\dots+\lambda_p t^{n_p}=0.$$

On en déduit que le polynôme $\lambda_1 X^{n_1}+\dots+\lambda_p X^{n_p}$ admet une infinité de racines, donc il est nul. Ainsi, on a $\lambda_1=\dots=\lambda_p=0$, donc la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

Exercice 20 :

1. Pour calculer l'intégrale, on utilise la formule trigonométrique

$$\cos(x)\cos(y)=\frac{1}{2}\big(\cos(x+y)+\cos(x-y)\big).$$

On a donc

$$I_{m,n}=\frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi}\cos((m+n)t)+\cos((m-n)t)\right)\mathrm{d}t.$$

Si $m\neq n$, on obtient

$$I_{m,n}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin((m+n)t)+\frac{1}{m-n}\sin((m-n)t)\right]_0^{2\pi}=0.$$

Si $m=n$, on obtient

$$I_{m,m}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin((m+n)t)+t\right]_0^{2\pi}=\pi.$$

2. Soient $(n_1,\dots,n_p)\in\mathbb{N}^p$ avec $n_1<\dots<n_p$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p$ tel que

$$\lambda_1 f_{n_1}+\dots+\lambda_p f_{n_p}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad \lambda_1\cos(n_1 x)+\dots+\lambda_p\cos(n_p x)=0.$$

Si on multiplie par $\cos(n_k x)$ pour un entier $k\in[\![1,p]\!]$, puis qu'on intègre entre 0 et 2π, on obtient la relation

$$\lambda_1 I_{n_1,n_k}+\dots+\lambda_p I_{n_p,n_k}=0.$$

En simplifiant avec la question précédente, on en déduit $\lambda_k=0$. Ainsi, la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

Exercice 21 : On a

$$H_1=\mathrm{Vect}\big((1,0,1,0),(0,1,0,1)\big)\quad\text{et}\quad H_2=\mathrm{Vect}\big((1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\big).$$

Ainsi, on a

$$F+G+H_1=\mathrm{Vect}\big(\underbrace{(1,0,0,1),(1,1,1,1),(1,0,1,0),(0,1,0,1)}_{\mathscr{F}}\big).$$

La famille $\mathscr{F}$ n'étant pas libre, on en déduit que la somme de F, G et H_1 n'est pas directe. D'autre part, on a

$$F+G+H_2=\mathrm{Vect}\big(\underbrace{(1,0,0,1),(1,1,1,1),(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)}_{\mathscr{G}}\big).$$

La famille $\mathscr{G}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, donc on en déduit que la somme de F, G et H_2 est directe et que l'on a $\mathbb{R}^4=F\oplus G\oplus H_2$.

Exercice 22 : Soit $\varphi\in E$. On montre l'existence et l'unicité de la décomposition selon $F+G+H$.

- **Unicité :** Supposons que $\varphi=f+g+h$ avec $(f,g,h)\in F\times G\times H$. Alors, comme g est linéaire et h est constante, on a $h:x\mapsto\varphi(0)$. De plus, en dérivant, on obtient $g:x\mapsto\varphi'(0)\cdot x$. Finalement, on en déduit que $f:x\mapsto\varphi-\varphi(0)-\varphi'(0)\cdot x$. Ainsi f,g et h sont uniquement déterminé par φ, d'où l'unicité de la décomposition.
- **Existence :** On pose

$$f:x\mapsto\varphi-\varphi(0)-\varphi'(0)\cdot x,\quad g:x\mapsto\varphi'(0)\cdot x,\quad h:x\mapsto\varphi(0).$$

On a $\varphi=f+g+h$, $f\in F$, $g\in G$ et $h\in H$.

Finalement, on a montré que $E=F\oplus G\oplus H$.

Exercice 23 :

1. Une base de H est $\big((1,-1,0),(1,0,-1)\big)$. On a donc

$$H+D=\mathrm{Vect}\big((1,-1,0),(1,0,-1),(1,0,1)\big).$$

Comme la famille $\big((1,-1,0),(1,0,-1),(1,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que la somme $H+D$ est directe et que $\mathbb{R}^3=H\oplus D$.

2. On a
$$u(H)=\operatorname{Vect}\big(u(1,-1,0),u(1,0,-1)\big)=\operatorname{Vect}\big(\underbrace{(0,-1,1)}_{\in H},\underbrace{(0,0,0)}_{\in H}\big)\subset H,$$
donc H est stable par u. De même, on a
$$u(D)=\operatorname{Vect}\big(u(1,0,1)\big)=\operatorname{Vect}\big(\underbrace{(2,0,2)}_{\in D}\big)\subset D,$$
donc D est stable par u.
3. On considère la base de $\mathbb{R}^3$
$$\mathscr{B}=\big(\underbrace{(1,-1,0),(1,0,-1)}_{\text{Base de } H},\underbrace{(1,0,1)}_{\text{Base de } D}\big)$$
qui est adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3=H\oplus D$. On a
$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Exercice 24 :
1. On a
$$H+D=\operatorname{Vect}\big((1,-3,0),(0,1,-1),(3,1,1)\big).$$
Comme la famille $\big((1,-3,0),(0,1,-1),(3,1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que la somme $H+D$ est directe et que $\mathbb{R}^3=H\oplus D$.
2. On a
$$u(H)=\operatorname{Vect}\big(u(1,-3,0),u(0,1,-1)\big)=\operatorname{Vect}\big(\underbrace{(-4,7,5)}_{\in H},\underbrace{(1,-4,1)}_{\in H}\big)\subset H,$$
donc H est stable par u. De même, on a
$$u(D)=\operatorname{Vect}\big(u(3,1,1)\big)=\operatorname{Vect}\big(\underbrace{(9,3,3)}_{\in D}\big)\subset D,$$
donc D est stable par u.
3. La matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est
$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\begin{pmatrix}-4&1&0\\-5&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

Exercice 25 :
1. On a
$$H+D=\operatorname{Vect}(1,X^2,X).$$
Comme la famille $(1,X^2,X)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, on en déduit que la somme $H+D$ est directe et que $\mathbb{R}_2[X]=H\oplus D$.
2. On a
$$u(H)=\operatorname{Vect}(u(1),u(X^2))=\operatorname{Vect}(X^2,1)\subset H,$$
donc H est stable par u. De même, on a
$$u(D)=\operatorname{Vect}(u(X))=\operatorname{Vect}(X)\subset D,$$
donc D est stable par u.
3. La matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est
$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 26 : Si $x\in\operatorname{Ker}(u)$, alors $u(x)=0\in\operatorname{Ker}(u)$, donc $\operatorname{Ker}(u)$ est stable par u. Si $x\in\operatorname{Im}(u)$, alors $u(x)\in\operatorname{Im}(u)$ par définition de l'image, donc $\operatorname{Im}(u)$ est stable par l'endomorphisme u.

Exercice 27 : On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(i) On a
$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(u)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},\quad \text{donc}\quad \operatorname{Tr}(u)=2.$$

(ii) On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \mathrm{Tr}(u) = 3.$$

Exercice 28 : On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

(i) On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \mathrm{Tr}(u) = 4.$$

(ii) On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \mathrm{Tr}(u) = 0.$$

(iii) On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \mathrm{Tr}(u) = 7.$$

Exercice 29 : Supposons par l'absurde qu'il existe deux telles matrices. Alors

$$0 = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n) = n,$$

ce qui n'est pas vrai.

Exercice 30 : Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A^p) = \mathrm{Tr}(A^{p-1}A) &= \mathrm{Tr}(A^{p-1}(AB - BA)) \\ &= \mathrm{Tr}(A^pB) - \mathrm{Tr}(A^{p-1}(BA)) \\ &= \mathrm{Tr}(A^pB) - \mathrm{Tr}((BA)A^{p-1}) \\ &= \mathrm{Tr}(A^pB) - \mathrm{Tr}(BA^p) = 0. \end{aligned}$$

Exercice 31 : L'application $\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est linéaire. De plus, $\mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n) = n \neq 0$, donc l'application Tr n'est pas nulle. On en déduit d'après le cours, que $H = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 32 :

1. Par hypothèse, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est de rang 1, donc toutes ses colonnes sont colinéaires à un vecteur $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il existe donc $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} y_1X & \cdots & y_nX \end{pmatrix} = XY \quad \text{avec} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}.$$
2. On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = XY$. Comme YX est une matrice 1×1, on a
$$M^2 = XYXY = X(YX)Y = (YX)XY = (YX)M.$$
De plus, on remarque que $YX = \mathrm{Tr}(YX) = \mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(M)$, donc on a démontré la relation $M^2 = \mathrm{Tr}(M) \cdot M$, ce qui permet de conclure.

Exercice 33 :

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ équivaut à montrer
$$\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0_E\} \quad \text{et} \quad E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p).$$
   - Soit $y \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. Comme $y \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. On a
   $$y = p(x) = p^2(x) = p(y) = 0$$
   car $y \in \mathrm{Ker}(p)$. Ainsi $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$. On peut écrire $x = (x - p(x)) + p(x)$. Le vecteur $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et
   $$p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0,$$
   donc $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$.
   - Soit $x \in E$. On peut écrire $x = (x - p(x)) + p(x)$. Le vecteur $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et
   $$p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0,$$
   donc $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. Ainsi $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$.

   Finalement, on a montré que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

2. Si $(u_1,\dots,u_k)$ est une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et $(v_1,\dots,v_r)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$, alors
$$\mathscr{B}=(u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_r)$$
est une base de E. De plus, comme p est un projecteur, on a $p(u_i)=0$ pour tout $i\in[\![1,k]\!]$ et $p(v_j)=v_j$ pour tout $j\in[\![1,r]\!]$. En notant, la matrice par bloc, on trouve
$$M=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)=\begin{pmatrix}\mathrm{O}_{k,k} & \mathrm{O}_{k,r}\\ \mathrm{O}_{r,k} & \mathrm{I}_r\end{pmatrix}.$$
3. On a $\mathrm{rang}(M)=r=\mathrm{Tr}(M)$, donc $\mathrm{rang}(u)=r=\mathrm{Tr}(u)$.

Exercice 34 : On a
$$(MM^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(M^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}=MM^{\mathrm{T}}$$
et de même
$$(M^{\mathrm{T}}M)^{\mathrm{T}}=M^{\mathrm{T}}(M^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=M^{\mathrm{T}}M,$$
donc MM^{T} et $M^{\mathrm{T}}M$ sont symétriques.

Exercice 35 : On raisonne par équivalence.
$$(AB)^{\mathrm{T}}=AB \quad\Leftrightarrow\quad B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=AB \quad\Leftrightarrow\quad BA=AB.$$
Donc AB est symétrique si et seulement si A et B commutent.

Exercice 36 :

1. On a $X^{\mathrm{T}}X=x_1^2+\ldots+x_n^2$. Or une somme de nombres réels positifs est nulle si et seulement si chacun des nombres sont nuls. Ainsi,
$$x_1^2+\cdots+x_n^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1^2=\cdots=x_n^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1=\cdots=x_n=0.$$
Ainsi $X=0$ si et seulement si $X^{\mathrm{T}}X=0$.
2. On montre les deux inclusions.
   - Si $X\in\mathrm{Ker}(M)$, alors
   $$M^{\mathrm{T}}MX=M^{\mathrm{T}}0=0,$$
   donc $X\in\mathrm{Ker}(M^{\mathrm{T}}M)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(M)\subset\mathrm{Ker}(M^{\mathrm{T}}M)$.
   - Réciproquement, si $X\in\mathrm{Ker}(M^{\mathrm{T}}M)$, notons $Y=MX$. On a
   $$Y^{\mathrm{T}}Y=X^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}MX=X^{\mathrm{T}}0=0.$$
   D'après la première question, on obtient $Y=MX=0$, donc $X\in\mathrm{Ker}(M)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(M^{\mathrm{T}}M)\subset\mathrm{Ker}(M)$.

   Finalement, $\mathrm{Ker}(M^{\mathrm{T}}M)=\mathrm{Ker}(M)$.

Exercice 37 :

1. Montrons que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - On a $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\subset\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - La matrice nulle est symétrique.
   - Si $M,N\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors
   $$(M+\lambda N)^{\mathrm{T}}=M^{\mathrm{T}}+\lambda N^{\mathrm{T}}=M+\lambda N,$$
   donc $M+\lambda N\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

   On a montré que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   Montrons que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - On a $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})\subset\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - La matrice nulle est antisymétrique.
   - Si $M,N\in\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors
   $$(M+\lambda N)^{\mathrm{T}}=M^{\mathrm{T}}+\lambda N^{\mathrm{T}}=-M-\lambda N=-(M+\lambda N),$$
   donc $M+\lambda N\in\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

   On a montré que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})=\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\oplus\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ équivaut à montrer
$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})=\mathscr{S}_n(\mathbb{R})+\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \quad\text{et}\quad \mathscr{S}_n(\mathbb{R})\cap\mathscr{A}_n(\mathbb{R})=\{0\}.$$
   - Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose
   $$S=\frac{1}{2}(M+M^{\mathrm{T}}) \quad\text{et}\quad A=\frac{1}{2}(M-M^{\mathrm{T}}).$$

On a $M = S + A$ et

$$S^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}(M^{\mathrm{T}} + M) = S \quad \text{et} \quad A^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}(M^{\mathrm{T}} - M) = -A,$$

donc $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) + \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

- Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On a $M = M^{\mathrm{T}} = -M$, donc $M = 0$. On a donc montré que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$.

Finalement, on a montré que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

3. En appliquant la question précédent, on trouve

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. En notant $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient qu'une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est composée des $E_{i,j} + E_{j,i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ et une base de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est composée des $E_{i,j} - E_{j,i}$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$. En comptant le nombre d'éléments dans ces bases, on trouve

$$\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$