CHAPITRE 1
Compléments d'algèbre linéaire

I - Révisions sur les espaces vectoriels

I.1 - Sous-espaces vectoriels

Exercice 1 : Montrer que l'ensemble

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0\}.$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de F.

Exercice 2 : Montrer que l'ensemble

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + t = y + z + t = 0\}.$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base de F.

Exercice 3 : Montrer que l'ensemble

$$F = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

I.2 - Bases

Exercice 4 : La famille

$$\mathscr{F} = \Big((1,-1,0,1),(1,1,1,1),(1,0,-1,-1),(0,1,1,1)\Big)$$

est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 5 : Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$, la famille

$$\mathscr{F}_a = \Big((1,-1,0),(2,-1,2),(1,0,a)\Big)$$

est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 6 : Montrer que la famille $\mathscr{F} = \Big(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Décomposer le polynôme 1 dans cette base.

I.3 - Applications linéaires

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 8 : Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(P) = P(0) + P(1).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ l'application définie par

$$f(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

II - Révisions sur les matrices

II.1 - Généralités

Exercice 10 : Déterminer l'inverse des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la puissance n-ième de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 : Déterminer le rang, le noyau et l'image des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer le rang de la matrice suivante.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

II.2 - Matrice d'une application linéaire

Exercice 14 : Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ de l'endomorphisme $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ défini par $u(P) = P'$.

Exercice 15 : On considère l'application $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad u(P) = P + P'(X+1).$$

1. Montrer que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$.
2. Déterminer la matrice M de u dans la base $(1, X, X^2, X^3)$.
3. Montrer que M est inversible. Que peut-on en déduire pour u ?
4. Calculer $\mathrm{Ker}(M - \mathrm{I}_4)$. En déduire $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
5. Calculer $\mathrm{Im}(M - \mathrm{I}_4)$. En déduire $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.

Exercice 16 : Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme défini par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x, y) = (x - 2y, x + 4y).$$

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique $\mathscr{C}$.
2. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathscr{B} = \big((2, -1), (1, -1)\big)$.
3. En déduire la matrice de u^n dans la base canonique pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 17 : Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B} = (i, j, k)$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

On pose $u = i + k$, $v = i + j$ et $w = i + j + k$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

III - Familles infinies de vecteurs

Exercice 18 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n \mathrm{e}^x$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre.

Exercice 19 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \mathrm{e}^{nx}$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre.

Exercice 20 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \cos(nx)$.

1. Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$

2. En déduire que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre.

IV - Sommes directes et sous-espaces vectoriels stables

Exercice 21 : On définit $F = \mathrm{Vect}((1,0,0,1))$, $G = \mathrm{Vect}((1,1,1,1))$ et

$$H_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z, \quad y = t\},$$
$$H_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = 0, \quad y + z = 0\}.$$

Étudier si $\mathbb{R}^4 = F \oplus G \oplus H_1$ et si $\mathbb{R}^4 = F \oplus G \oplus H_2$?

Exercice 22 : Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On considère les trois sous-espaces vectoriels

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}, \qquad G = \{g \in E \mid g \text{ est linéaire}\},$$
$$H = \{h \in E \mid h \text{ est constante}\}.$$

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 23 : Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

On définit également

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad D = \mathrm{Vect}\big((1,0,1)\big).$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$.
2. Montrer que H et D sont stables par u.
3. Écrire la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe ci-dessus.

Exercice 24 : Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

On définit également $H = \mathrm{Vect}\big((1,-3,0),(0,1,-1)\big)$ et $D = \mathrm{Vect}\big((3,1,1)\big)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$.
2. Montrer que H et D sont stables par u.
3. Écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B} = \big((1,-3,0),(0,1,-1),(3,1,1)\big)$.

Exercice 25 : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad u(P) = X^2 P\left(\frac{1}{X}\right).$$

On définit également $H = \mathrm{Vect}(1, X^2)$ et $D = \mathrm{Vect}(X)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = H \oplus D$.
2. Montrer que H et D sont stables par u.
3. Écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B} = (1, X^2, X)$.

Exercice 26 : Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u.

V - Trace d'une matrice ou d'un endomorphisme

Exercice 27 : Calculer la trace de $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dans chacun des cas suivants.

$$(i)\ \ u(x,y,z) = (x+y+z, x+z, y+z), \quad (ii)\ \ u(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x).$$

Exercice 28 : Calculer la trace de $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ dans chacun des cas suivants.

$$(i)\ \ u(P) = P + P', \quad (ii)\ \ u(P) = P(X+1) - P(X), \quad (iii)\ \ u(P) = XP' + P(1).$$

Exercice 29 : Existe-t-il un couple $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB - BA = \mathrm{I}_n$?

Exercice 30 : Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB - BA = A$. Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Tr}(A^p) = 0$.

Exercice 31 : Montrer que l'ensemble

$$H = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\}$$

est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 32 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une base $\mathscr{B}$ de E et un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = XY$.
2. En déduire que $u^2 = \mathrm{Tr}(u) \cdot u$.

Exercice 33 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.

1. Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
2. Écrire la matrice de p dans une base adaptée à $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
3. En déduire que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rang}(p)$.

VI - Matrices symétriques et antisymétriques

Exercice 34 : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les matrices MM^{T} et $M^{\mathrm{T}}M$ sont symétriques.

Exercice 35 : Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques. Montrer que AB est symétrique si et seulement si A et B commutent.

Exercice 36 : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Exprimer $X^{\mathrm{T}}X$ en fonction de $x_1, \dots, x_n$. En déduire que $X^{\mathrm{T}}X = 0$ si et seulement si $X = 0$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(M^{\mathrm{T}}M)$.

Exercice 37 : On note respectivement $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
3. Décomposer la matrice ci-dessous selon cette somme directe

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

4. Déterminer la dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et la dimension de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.