CHAPITRE 1
Compléments d'algèbre linéaire

Plan du chapitre

Introduction

L'algèbre linéaire est née de l'étude des systèmes linéaires, dont la résolution est motivée par l'introduction de la géométrie analytique par Descartes dans son appendice *La Géométrie* en 1637. Les premiers résultats sont énoncés par Leibniz en 1693 et Maclaurin en 1748 pour les systèmes à deux ou trois inconnues, puis généralisés par Cramer en 1750 avec les formules qui portent aujourd'hui son nom. Ce n'est qu'en 1810 que Gauss présenta la méthode du pivot permettant de résoudre les systèmes linéaires sous forme de tableaux de nombres. Cependant, on en trouve des traces en Chine aux alentours du IIe siècle avant notre ère, sous le nom de *Fang cheng* ce qui se traduit littéralement par « la disposition rectangulaire ».

Les tableaux de nombres sont manipulés depuis deux siècles avant notre ère, mais le terme « matrice » est employé pour la première fois par Sylvester en 1850. Les opérations usuelles du calcul matriciel sont définies dans un traité de Cayley publié en 1854 portant sur les transformations géométriques. Cette approche abstraite des opérations sur les matrices est révolutionnaire car l'utilisation des matrices était essentiellement bornée au calcul des déterminants jusque-là.

Au cours du XVIIIe siècle, les mathématiciens cherchent à développer un formalisme permettant d'unifier les résultats sur des objets distincts présentant des propriétés communes. Grassmann publie son traité *La théorie de l'extension linéaire* en 1844 dans lequel il introduit la notion d'espace vectoriel de dimension finie afin de calculer des grandeurs géométriques en étant débarrassé des choix de coordonnées. Le fait que la dimension puisse être supérieure à trois fit apparaître quelques réticences de la part de ceux qui considèrent que tout objet mathématique doit avoir une interprétation dans le monde sensible, mais elles se dissipèrent avec le temps. Finalement, Peano donne en 1888 une définition axiomatisée des espaces vectoriels proche de celle que nous utilisons de nos jours.

L'algèbre linéaire est omniprésente dans les différentes disciplines scientifiques, notamment par l'utilisation des matrices et de leurs propriétés. De plus, la notion d'espace vectoriel a par exemple un rôle central en mécanique quantique et dans la théorie des codes utilisée dans les télécommunications.

L'objectif de ce chapitre est principalement d'introduire quelques nouvelles notions en algèbre linéaire que nous utiliserons dans les chapitres suivants.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$. On fixe également un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

I - Familles de vecteurs

Rappelons qu'une combinaison linéaire de vecteurs de E ne fait intervenir qu'un nombre fini de vecteurs de E et de scalaires de $\mathbb{K}$.

I.A - Familles libres

Définition (Famille libre et famille liée) : Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.

(i) La famille $\mathscr{F}$ est libre si la seule combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{F}$ égale au vecteur nul 0_E est celle dont tous les coefficients sont nuls.

(ii) La famille $\mathscr{F}$ est liée si elle n'est pas libre.

Remarques 1 :

a) On peut reformuler la définition précédente. Une famille $\mathscr{F} = (v_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est libre si et seulement si pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tous indices $i_1, \dots, i_r \in I$ deux à deux distincts, on a

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r, \quad \Big(\alpha_1 v_{i_1} + \cdots + \alpha_r v_{i_r} = 0_E \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0\Big).$$

b) Une famille $\mathscr{F}$ est liée si et seulement si un vecteur de la famille $\mathscr{F}$ s'écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{F}$.

Exemples 1 :

a) La famille $(X^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

b) La famille $(P_a)_{a\in\mathbb{R}}$ où $P_a = X + a$ est une famille liée de $\mathbb{K}[X]$. En effet, on a la relation $P_2 - 2P_1 + P_0 = 0$.

Rappelons qu'une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ est dite échelonnée en degré si les polynômes de la famille sont de degrés deux à deux distincts.

Proposition 1 : Toutes famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ échelonnée en degré est libre.

Exemple 2 : La famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ où $P_k = X^{2k} + X^k + 1$ est libre.

I.B - Familles génératrices

Définition (Famille génératrice) : Une famille $\mathscr{F}$ de vecteurs de E est génératrice si tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{F}$.

Exemple 3 : La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

I.C - Bases

Définition (Base) : Une famille de vecteurs de E est une base si elle est libre et génératrice.

Exemple 4 : La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. On l'appelle base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 2 : Une famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 5 : La famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ où $P_k = \sum_{i=0}^{k} X^i$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

II - Sous-espaces vectoriels

II.A - Somme de sous-espaces vectoriels

Dans cette sous-partie, on fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ de E.

Définition (Somme de sous-espaces vectoriels) : La somme des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ de E, noté $F_1 + \dots + F_p$ est le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F_1 + \dots + F_p = \{v_1 + \dots + v_p \in E \mid \forall i \in [\![1,p]\!],\ \ v_i \in F_i\}.$$

Remarque 2 : La définition ci-dessus est la généralisation de celle vue en première année pour la somme de deux sous-espaces vectoriels.

Définition (Somme directe de sous-espaces vectoriels) : On dit que la somme des sous-espaces vectoriels $F = F_1 + \dots + F_p$ est directe si tout élément de F se décompose de manière unique selon $(F_1, \dots, F_p)$, i.e.

$$\forall v \in F, \quad \exists! (v_1, \dots, v_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \quad v = v_1 + \dots + v_p.$$

Dans ce cas, on note $F = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.

Exemple 6 : Trois droites vectorielles dans $\mathbb{R}^3$ sont en somme directe si et seulement si elles ne sont pas coplanaires.

Proposition 3 : La somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe si et seulement si pour tout élément $(v_1, \dots, v_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$, on a

$$v_1 + \dots + v_p = 0_E \quad \Rightarrow \quad v_1 = \dots = v_p = 0_E.$$

Remarque 3 : La condition dans la proposition précédente signifie que le vecteur nul 0_E se décompose de manière unique selon $(F_1, \dots, F_p)$.

Théorème 1 : Si $\mathscr{B}_k$ est une base de F_k pour chaque $k \in [\![1,p]\!]$, alors

$$F_1 + \dots + F_p = \mathrm{Vect}\underbrace{\left(\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p\right)}_{\mathscr{B}}.$$

De plus, la somme est directe si et seulement si la famille $\mathscr{B}$ est libre. Dans ce cas, on dit que $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la somme directe $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.

Remarque 4 : Si E est de dimension finie et si la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe, on en déduit que

$$\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_p) = \dim(F_1) + \dots + \dim(F_p).$$

II.B - Hyperplans d'un sous-espace vectoriel

On suppose dans cette sous-partie que E est de **dimension finie** $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition (Hyperplan) : Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

Exemples 7 :

a) Si $\dim E = 2$, les hyperplans de E sont les droites vectorielles.

b) Si $\dim E = 3$, les hyperplans de E sont les plans vectoriels.

Théorème de caractérisation des hyperplans : Soit F un sous-espace vectoriel de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Le sous-espace vectoriel F est un hyperplan de E.

(ii) Le sous-espace vectoriel F admet une droite vectorielle en supplémentaire.

(iii) Il existe une application linéaire non nulle $\varphi : E \to \mathbb{K}$ telle que $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Remarque 5 : On en déduit que tout hyperplan de $E = \mathbb{K}^n$ admet une équation de la forme $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ où $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ est non nul.

II.C - Sous-espaces stables

Définition (Sous-espace vectoriel stable) : Un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ si $u(F) \subset F$, i.e.

$$\forall v \in F, \quad u(v) \in F.$$

Exemples 8 :

a) Les sous-espaces vectoriels $\{0_E\}$ et E sont stables pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$.

b) Les sous-espaces vectoriels stables d'une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\pi/2$ sont $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et $\mathbb{R}^2$.

c) Les sous-espaces vectoriels stables d'une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'angle $\pi/2$ sont $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, l'axe de la rotation D, le plan vectoriel orthogonal à D et $\mathbb{R}^3$.

d) On considère l'endomorphisme $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad u(x,y,z) = (7x+4y+4z, 4x-8y+z, -4x-y+8z).$$

Alors les sous-espaces vectoriels

$$D = \mathrm{Vect}\Big((1,-4,0)\Big) \quad \text{et} \quad H = \mathrm{Vect}\Big((0,0,1),(4,1,0)\Big)$$

sont stables par u. En effet, on a

$$u(D) = \mathrm{Vect}\big(u(1,-4,0)\big) = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(-9,36,0)}_{\in D}\big) \subset D,$$
$$u(H) = \mathrm{Vect}\big(u(0,0,1), u(4,1,0)\big) = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(4,1,8)}_{\in H}, \underbrace{(32,8,-17)}_{\in H}\big) \subset H.$$

Remarque 6 : Si F est un sous-espace stable par $u \in \mathscr{L}(E)$, alors la restriction $u_{|F}$ de u à F est un endomorphisme de F.

Proposition 4 : On suppose que l'espace vectoriel E est de dimension finie et on considère des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ de E tels que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$. Si $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p)$ est une base adaptée à la somme directe précédente et si les sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ sont stables par un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$, alors on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_i}(u_{|F_i}).$$

Exemple 9 : On reprend l'exemple précédent. On considère la base

$$\mathscr{B} = \big(\underbrace{(1,-4,0)}_{\text{Base de } D}, \underbrace{(0,0,1),(4,1,0)}_{\text{Base de H}}\big)$$

qui est adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = D \oplus H$. La matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -17 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

III - Matrices

III.A - Trace d'une matrice carrée

Définition (Trace d'une matrice carrée) : La trace d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, notée $\mathrm{Tr}(A)$, est la somme de ses coefficients diagonaux, i.e.

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}.$$

Exemple 10 : Pour $n = 2$, on a $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$.

Proposition 5 : La trace vérifie les propriétés suivantes.

(i) L'application $\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une application linéaire.

(ii) Pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Rappelons que deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Corollaire 1 : Si deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors elles ont la même trace.

III.B - Trace d'un endomorphisme en dimension finie

On fixe un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

Définition (Trace d'un endomorphisme) : Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme. La trace de u, notée $\mathrm{Tr}(u)$, est la trace de la matrice représentant u dans une base $\mathscr{B}$ de E.

Remarque 7 : Le corollaire précédent nous assure que le nombre $\mathrm{Tr}(u)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ de E que l'on a choisi pour le calculer.

Exemple 11 : On considère l'endomorphisme $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$u(P) = XP''(X) + P(X).$$

Dans la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, la matrice de u est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la trace de u est $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(A) = 1 + 1 + 1 = 3$.

III.C - Transposée d'une matrice

Définition (Transposée d'une matrice) : La matrice transposée (ou la transposée) d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice notée $A^{\mathrm{T}} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Exemple 12 : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, alors $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Remarques 8 :

a) En notant $B = A^{\mathrm{T}}$, la définition se traduit sur les coefficients par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!], \quad b_{i,j} = a_{j,i}.$$

b) La transposée de la matrice A^{T} est A, i.e. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$.

Proposition 6 : On a les propriétés suivantes.

(i) La transposition est linéaire :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})^2, \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad (\lambda A + \mu B)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}} + \mu B^{\mathrm{T}}.$$

(ii) Pour tout $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.

(iii) Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors la matrice A^{T} est inversible et on a la relation $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.

III.D - Matrices symétrique et antisymétriques

Définition (Matrice symétrique ou antisymétrique) : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) On dit que M est symétrique si $M^{\mathrm{T}} = M$.

(ii) On dit que M est antisymétrique si $M^{\mathrm{T}} = -M$.

Exemples 13 :

a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est symétrique.

b) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarque 9 : Les coefficients de la diagonale principale d'une matrice antisymétrique sont nuls.