Suites homographiques

Introduction

Dans ce problème, on fixe un quadruplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ vérifiant la condition $ad - bc \neq 0$. Nous allons étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}.$$

Une telle suite est appelée une suite homographique.

I. Premier cas : $c = 0$

Dans cette partie, on suppose que $c = 0$. Quitte à redéfinir les nombres complexes a et b, on peut supposer que $d = 1$. Nous allons donc étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

Dans ce cas particulier, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

1. **Quelques cas élémentaires.**
   - **a)** Que peut-on dire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $a = 1$?
   - **b)** Que peut-on dire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $b = 0$?

2. **Expression générale de la suite.** On suppose que $a \neq 1$.
   - **a)** Montrer que l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = az + b$ admet un unique point fixe que l'on note γ.
   - **b)** Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \gamma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique de raison a.
   - **c)** En déduire que l'on a
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.$$
   - **d)** Discuter la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $|a|$.

3. **Étude d'un exemple.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 50$ et
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 0,95 \cdot u_n + 3.$$
   - **a)** Déterminer une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 60.
   - **c)** Déterminer le plus petit entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant 55$.

II. Second cas : $c \neq 0$

Dans cette partie, on suppose que $c \neq 0$. On considère la fonction $f : D_f \to \mathbb{C}$ définie par

$$D_f = \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \quad \text{et} \quad f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Dans la suite, on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement définie, ce qui n'est pas automatique, car le dénominateur peut s'annuler.

A. Points fixes de l'application f

Dans cette partie, on détermine quelques propriétés sur les points fixes de l'application f.

1. Montrer que f admet un point fixe ou deux points fixes dans D_f.

2. Montrer que l'application f est injective.

3. En déduire que si $z \in D_f$ n'est pas un point fixe de f, alors $f(z)$ n'en est pas un non plus.

4. Que peut-on dire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si u_0 est un point fixe de f ?

B. Cas où f admet deux points fixes

Dans cette partie, on suppose que f admet deux points fixes que l'on note $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{C}$. On suppose également que $u_0 \notin \{\alpha, \beta\}$. D'après la question **II.3**, on en déduit que $u_n \notin \{\alpha, \beta\}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

5. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ est géométrique de raison $q = \dfrac{c\alpha + d}{c\beta + d}$.

6. **Étude d'un exemple.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ avec

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-4\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3x+2}{x+4}.$$

- **a)** Montrer que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.
- **b)** Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
- **c)** Montrer que les points fixes de l'application f sont 1 et -2.
- **d)** En utilisant la question **II.5**, déterminer une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **e)** En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

C. Cas où f admet un point fixe

Dans cette partie, on suppose que f admet un unique point fixe que l'on note $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose également que $u_0 \neq \alpha$. D'après la question **II.3**, on en déduit que $u_n \neq \alpha$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

7. En remarquant que α est la racine double du polynôme $cX^2 + (d-a)X - b$, montrer que

$$(a+d)^2 = 4(ad - bc) \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{a-d}{2c}.$$

8. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ est arithmétique de raison $q = \dfrac{2c}{a+d}$.

9. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

10. **Étude d'un exemple.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ avec

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-4\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x-1}{x+4}.$$

a) Montrer que $f\big(]-1,+\infty[\big) \subset]-1,+\infty[$.

b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

c) Montrer que l'application f admet -1 comme unique point fixe.

d) En utilisant la question **II.8**, déterminer une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Fin