Séries de pile ou de face

Introduction

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'évènement « le k-ième lancer de la pièce donne pile » et par F_k l'évènement « le k-ième lancer de la pièce donne face ».

On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n°1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n°2 commence au lancer suivant la fin la série n°1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus.

Exemple 1 : $\underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n°1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n°2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n°3}} \cap F_8 \cap \cdots.$

Exemple 2 : $\underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n°1}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n°2}} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k\right)}_{\text{Série n°3}}.$

Dans ce problème, nous allons étudier la longueur de la première série, puis le nombre de séries apparaissant lors des n premiers lancers.

I. Longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

(i) si la série n°1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;

(ii) sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n°1.

Ainsi, si l'évènement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'événement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

1. Dans cette question, on calcule une somme utile pour la suite.

- **a)** Rappeler le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{k \geqslant 0} x^k$.
- **b)** En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum_{k \geqslant 0} kx^k$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

2. On considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

- **a)** Exprimer l'évènement $(L_1 = k)$ en fonction des évènements P_i et F_i pour $i \in [\![1, k+1]\!]$.
- **b)** Montrer que $P(L_1 = k) = 2^{-k}$.
- **c)** En déduire la valeur de $P(L_1 = 0)$.

3. Montrer que la variable aléatoire L_1 est d'espérance finie, puis déterminer $\mathrm{E}(L_1)$.

II. Nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'évènement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. **a)** Déterminer les lois de N_1 et N_2.

b) Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

2. Dans cette question, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n. On considère un entier $k \in [\![1, n+1]\!]$.

a) Justifier que l'on a l'égalité d'évènements

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}.$$

b) En déduire que l'on a l'égalité

$$P\big((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\big) = \frac{1}{2} P\big((N_n = k) \cap P_n\big).$$

Dans la suite, on admet que l'on peut établir de manière analogue les relations

$$P\big((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}\big) = \frac{1}{2} P\big((N_n = k) \cap F_n\big),$$

$$P\big((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}\big) = \frac{1}{2} P\big((N_n = k-1) \cap P_n\big),$$

$$P\big((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}\big) = \frac{1}{2} P\big((N_n = k-1) \cap F_n\big).$$

c) En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a la relation

$$P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2} P(N_n = k) + \frac{1}{2} P(N_n = k-1).$$

3. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m. En particulier, on déduit des résultats précédents que $G_1(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Déduire de la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x).$$

b) Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que la variable aléatoire N_n est d'espérance finie, puis déterminer $\mathrm{E}(N_n)$.

d) Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n.

Fin