Séries de Hardy

Introduction

L'objectif de ce problème est d'étudier en fonction $\alpha \in]0,+\infty[$ la convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin\left(\pi\sqrt{n}\right)}{n^\alpha}.$$

Une série de cette forme est appelée une série de Hardy.

I. Une comparaison série-intégrale

Dans cette partie, on considère un réel $\alpha \in]1/2,+\infty[$ et la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}{t^\alpha}$.

1. **a)** Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et vérifier que

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad f'(t) = \frac{\pi\cos\left(\pi\sqrt{t}\right)\sqrt{t} - 2\alpha\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}{2t^{\alpha+1}}.$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. **a)** Montrer qu'il existe un nombre réel $K > 0$ tel que

$$\forall t \in]1,+\infty[, \quad \left|f'(t)\right| \leqslant \frac{K}{t^{\alpha+1/2}}.$$

b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$ convergent absolument.

3. **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos\left(\pi\sqrt{t}\right)}{t^{\alpha-1/2}}\right]_n^{n+1} + \frac{2\alpha-1}{\pi}\int_n^{n+1}\frac{\cos\left(\pi\sqrt{t}\right)}{t^{\alpha+1/2}}\,\mathrm{d}t.$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left|\int_n^{n+1}\frac{\cos\left(\pi\sqrt{t}\right)}{t^{\alpha+1/2}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n^{\alpha+1/2}}.$$

c) Conclure que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

4. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin\left(\pi\sqrt{n}\right)}{n^\alpha}$ est convergente.

II. Le cas limite $\alpha = 1/2$

Dans cette partie, on admet que l'on pourrait montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n}$ est convergente en employant la même méthode que dans la partie précédente.

1. En considérant une suite extraite bien choisie, montrer que la suite $\left(\cos(\pi\sqrt{n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

2. **a)** Montrer que l'on a l'égalité

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\sqrt{n+1}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\sqrt{n}}\left(\frac{\mathrm{i}\pi}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2}{8n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right).$$

b) En déduire que l'on a l'égalité

$$\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{\pi}\left(\cos(\pi\sqrt{n}) - \cos(\pi\sqrt{n+1})\right) - \frac{\pi}{4}\frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

3. Conclure que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ est divergente.

III. Utilisation d'une transformation d'Abel

Dans cette partie, on considère un réel $\alpha \in \,]0,1/2[$. On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on définit la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}).$$

Dans la suite du problème, on suppose que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^{\alpha}} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{n^{1/2-\alpha}}.$$

On raisonne par l'absurde en supposant que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ est convergente.

2. Justifier que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

3. On considère un réel $M\in\mathbb{R}$ tel que $|A_n| \leqslant M$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que la suite $(A_n b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

b) Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 0} A_k(b_k - b_{k+1})$ converge absolument.

4. Déduire des questions précédentes que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$ est convergente. Conclure.

Fin